

UN APPROCCIO MANIFESTAMENTE COVARIANTE ALLA TEORIA QUANTISTICA DEI CAMPI^{*†}

Paolo Fabbri

21 aprile 2016

Sommario

English.

The standard canonical quantum field theory, based on a wave functional and on functional equations, selects the time coordinate among the others. We shall describe an approach, non-novel in part, which treats all the coordinates, and all the orders of derivation, on an equal footing, and which makes use of ordinary wave functions and differential equations. It keeps the symmetries manifest, is applicable to Lagrangians of every order, does not require renormalization, and is, therefore, applicable to gravity, and it does not suffer from ordering ambiguities. The main objection, that one can move, is that a function cannot take into account the correlations among different spacial points, as a functional can do. Interactions, especially with the measurement instruments, solve this problem, keeping the information on correlations in a point of the instrument. When these interactions are absent, one can observe new phenomena.

Italiano.

La teoria quantistica dei campi canonica tradizionale, basata su un funzionale d'onda e su equazioni funzionali, privilegia la coordinata temporale rispetto alle altre. Verrà descritto un approccio, in parte non nuovo, che tratta tutte le coordinate, e tutti gli ordini di derivazione, allo stesso modo e fa uso di ordinarie funzioni d'onda e equazioni differenziali. Esso permette di mantenere manifeste le simmetrie, è applicabile a lagrangiane di qualsiasi ordine, non richiede rinormalizzazione, ed è quindi applicabile alla gravità, e non risente di ambiguità

^{*}<http://pfabbri.interfree.it/covar.pdf>

[†]Questo articolo è affetto da gravi errori, che vengono, in parte, corretti da [16].

di ordinamento. La principale obiezione, che si può sollevare, è che una funzione non può, come un funzionale, tener conto delle correlazioni tra punti diversi dello spazio. Le interazioni, in particolare con gli strumenti di misura, risolvono questo problema, conservando, in un punto dello strumento, l'informazione sulle correlazioni. Quando queste interazioni sono assenti, si possono osservare fenomeni nuovi.

Indice

1	Approccio tradizionale alla quantizzazione dei campi	2
2	Approccio manifestamente covariante	6
3	Generalizzazioni	15
4	Esempi	22

1 Approccio tradizionale alla quantizzazione dei campi

La teoria classica di un campo ci fornisce, per esso, delle equazioni alle derivate parziali (“equazioni del moto”), che permettono di determinarne l'evoluzione temporale, e gli eventuali vincoli che le condizioni iniziali debbono soddisfare.

L'idea tradizionale [1]-[12], per quantizzare una tale teoria, incomincia col ricavare queste equazioni da un principio di minima azione:

$$S[\phi^a(x^\mu)] = \int L[\phi^a, \phi^a_{,0}] dt = \int \frac{1}{c} \mathcal{L}(\phi^a, \phi^a_{,\mu}) d^D x, \quad (1)$$

dove S è l'azione, L la lagrangiana, \mathcal{L} la densità di lagrangiana, ϕ^a i campi, con l'indice a che varia per tener conto di tutti i campi presenti nella teoria. x^μ sono le coordinate spazio-temporali, D il numero di dimensioni dello spazio-tempo, t il tempo, c la velocità della luce. La virgola indica la derivata parziale e l'indice 0 si riferisce alla coordinata temporale ct . La parentesi quadra indica la dipendenza funzionale (S è un funzionale della funzione ϕ^a , ecc.).

Variando S si ottengono le equazioni del moto

$$\frac{\delta S}{\delta \phi^a} = 0, \quad (2)$$

ovvero

$$\frac{\delta L}{\delta \phi^a} - \left(\frac{\delta L}{\delta \phi_{,0}^a} \right)_{,0} = 0, \quad (3)$$

ovvero

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^a} - \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,\mu}^a} \right)_{,\mu} = 0. \quad (4)$$

Il rapporto delle δ indica la derivata funzionale, e, nel secondo termine della (4), come sempre, d'ora innanzi, è sottintesa la somma sugli indici ripetuti (in questo caso μ).

Noto S , si definiscono i momenti π_a coniugati ai ϕ^a :

$$\pi_a = \frac{1}{c} \frac{\delta L}{\delta \phi_{,0}^a} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,0}^a} \quad (5)$$

e si invertono le relazioni (5), per ottenere i $\phi_{,0}^a$ in funzione dei π_a , e sostituirli nell'espressione

$$\mathcal{H} = c \pi_a \phi_{,0}^a - \mathcal{L}, \quad (6)$$

per avere la densità di hamiltoniana \mathcal{H} , in funzione dei ϕ^a e dei π_a , e la hamiltoniana

$$H[\phi^a, \pi_a] = \int \mathcal{H} d^{D-1}x, \quad (7)$$

dove l'integrazione è eseguita sulle $D-1$ coordinate spaziali (non sul tempo).

Posto, ora,

$$\pi_a = -i\hbar \frac{\delta}{\delta \phi^a}, \quad (8)$$

si può scrivere l'equazione di Schrödinger

$$i\hbar \frac{d\Psi}{dt} = H \left[\phi^a, -i\hbar \frac{\delta}{\delta \phi^a} \right] \Psi, \quad (9)$$

che determina l'evoluzione temporale del funzionale d'onda Ψ . Ψ è funzionale dei ϕ^a , considerati funzioni delle coordinate spaziali (a tempo fissato). Ψ è inoltre funzione ordinaria di t :

$$\Psi = \Psi[\phi^a, t]. \quad (10)$$

Nella pratica, conviene sviluppare i campi e i loro momenti coniugati in integrale di Fourier, e, dalle loro relazioni di commutazione, dedurre quelle per i coefficienti di Fourier. Essi risultano, così, essere operatori di creazione e annichilazione, che si possono pensare come creatori o distruttori di particelle (quanti del campo). L'interpretazione corpuscolare del campo, caratteristica

della meccanica quantistica, è così ritrovata. La hamiltoniana libera (cioè privata di termini che rappresentano interazioni) è in accordo con la relazione di de Broglie per l'energia, e, se si calcola la quantità di moto associata al campo, anch'essa corrisponde all'altra relazione di de Broglie.

Sostituendo, quindi, nella hamiltoniana (completa dei termini di interazione), ai campi e ai momenti, il loro sviluppo di Fourier, si ottiene un operatore costruito con creatori e annichilatori, che, agendo sul vettore di stato del sistema, crea nuove particelle, ne distrugge di vecchie, o semplicemente ne cambia la quantità di moto, il tutto con determinate ampiezze di probabilità. In questa variazione, del numero, del tipo e della quantità di moto delle particelle, sta l'evoluzione quantistica del sistema.

Tutto questo è valido in linea di principio, ma, mettendolo in pratica, bisogna affrontare serissimi ostacoli:

1. Nella maggior parte delle teorie di interesse pratico, la lagrangiana non contiene la derivata rispetto al tempo di alcuni campi. Ciò implica che i momenti coniugati a tali campi si annullano. Questo, da un lato, impedisce di soddisfare la regola di commutazione canonica tra tali momenti e i campi ad essi coniugati, dall'altro, rende mal definita la hamiltoniana, in quanto non è possibile invertire l'espressione dei momenti, per ricavare le derivate temporali dei campi, da inserire nella hamiltoniana. Anche per altre vie, non si riesce, di solito, a scrivere una hamiltoniana, da cui discendano equazioni di Hamilton interamente coerenti con le equazioni lagrangiane.

Le operazioni che possono risolvere il problema, come il fissaggio del gauge, o la realizzazione dei vincoli, presenti in questi casi, tra le variabili dinamiche, sono, nel caso quantistico, difficili da comprendere e, a volte, da mettere in pratica.

2. All'atto di tradurre la hamiltoniana classica in un operatore quantistico, vi è ambiguità nella scelta dell'ordine dei fattori nei vari termini, in quanto gli operatori quantistici possono non commutare.

Questo problema è, in linea di principio, molto grave [13], in quanto un qualunque operatore $F(q, p)$, con p momento coniugato a q , può essere riscritto

$$F(q, p) - \frac{i}{\hbar}(qp - pq)G(q, p), \quad (11)$$

con $G(q, p)$ operatore arbitrario. Cambiando l'ordine dei fattori, la (11) diventa

$$F(q, p) - \frac{i}{\hbar}(qp - pq)G(q, p) = F(q, p) + G(q, p), \quad (12)$$

e differisce da $F(q, p)$ per un operatore arbitrario. È quindi possibile, cambiando solo l'ordine dei fattori, trasformare un operatore in un qualunque altro.

Per fortuna, le richieste che il termine che si sta scrivendo abbia le giuste simmetrie, il corretto limite classico e sia hermitiano, unitamente a un po' di rasoio di Occam, permettono di ridurre molto le possibilità, e, a volte, di risolvere il problema. Se permangono ambiguità, esse possono essere assorbite nel valore dei parametri osservabili, all'atto della rinormalizzazione (vedi più oltre). Il rasoio di Occam è il principio filosofico, secondo cui, dei fenomeni, bisogna cercare la spiegazione più semplice.

3. Le ampiezze di transizione, da uno stato a un altro, calcolate all'ordine perturbativo più basso, nei parametri della teoria, che regolano le interazioni (costanti "di accoppiamento"), danno risultati facilmente interpretabili. Ma le correzioni successive generano, oltre a vere correzioni delle ampiezze, correzioni ai valori efficaci dei parametri (cariche elettriche, masse, ...). Queste ultime correzioni risultano, di solito, infinite. Per avere il valore finito, osservato sperimentalmente, bisogna quindi supporre che i valori veri ("nudi"), dei parametri, siano anch'essi infiniti e opposti alle correzioni, in modo da compensarle e lasciare una differenza finita ("rinormalizzazione"). Queste differenze sono fissate dai valori sperimentali.

Purtroppo, come correzione, possono insorgere anche termini, con la loro costante moltiplicativa infinita, non presenti nella lagrangiana originaria. Per essi, non sappiamo quanto debba valere il parametro osservabile sperimentalmente. La sua presenza è da considerarsi un punto, che la teoria lascia indeterminato. Più sono tali punti, minore è il potere predittivo della teoria stessa, e meno essa è attraente come teoria fondamentale (in quanto viziata da molte arbitrarietà). In certi casi, il numero dei parametri, che rimangono indeterminati, può, addirittura, essere infinito. In questo caso, si dice, forse impropriamente, che la teoria non è rinormalizzabile.

La teoria che descrive la fisica finora nota ("modello standard") è, in assenza di gravità, manifestamente rinormalizzabile. La gravità, purtroppo, non lo è.

4. Non è detto che le simmetrie, presenti nella teoria classica, vengano preservate nel passaggio al quantistico, e alcune di esse, come quella di Lorentz o quelle di gauge, rappresentano principi fisici nei quali crediamo.

Amnesso di saper risolvere tutte queste difficoltà, l'approccio descritto, che privilegia la coordinata temporale rispetto alle altre, appare corretto, ma inopportuno. La teoria quantistica di un campo dovrebbe essere una generalizzazione della meccanica quantistica, che, come le equazioni del moto classiche, tratti allo stesso modo tutte le dimensioni spazio-temporali, e sia, quindi, manifestamente Lorentz-invariante. Esiste un approccio, mediante "integrale sui cammini" [4] [9] [5] [3], che è manifestamente Lorentz-invariante, ma a me pare meno diretto, e tendente a nascondere il contenuto fisico, la struttura matematica, e le difficoltà tecniche comunque presenti.

Buona parte della strada alternativa, che tenteremo nei prossimi paragrafi, non è nuova. [14] e [15] ne sono un esempio.

2 Approccio manifestamente covariante

Data una densità di lagrangiana \mathcal{L} , definiamo un momento coniugato per ogni direzione spazio-temporale:

$$\pi_a^\mu = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,\mu}^a}. \quad (13)$$

Invertiamo, quindi, le (13), per ottenere i $\phi_{,\mu}^a$ in funzione dei π_a^μ , e definiamo la densità di hamiltoniana

$$\mathcal{H} = c \pi_a^\mu \phi_{,\mu}^a - \mathcal{L}, \quad (14)$$

da scriversi in funzione dei ϕ^a e dei π_a^μ .

Calcolando la variazione di \mathcal{H} , come nella meccanica hamiltoniana ordinaria,

$$\delta \mathcal{H} = c \phi_{,\mu}^a \delta \pi_a^\mu + c \pi_a^\mu \delta \phi_{,\mu}^a - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^a} \delta \phi^a - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,\mu}^a} \delta \phi_{,\mu}^a. \quad (15)$$

Data la definizione (13), il quarto termine si semplifica con il secondo, e, data l'equazione del moto (4), il terzo termine può essere sostituito da

$-\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,\mu}^a}\right)_{,\mu} \delta \phi^a$, cioè da $-c \pi_{a,\mu}^\mu \delta \phi^a$. Dunque

$$\delta \mathcal{H} = c \phi_{,\mu}^a \delta \pi_a^\mu - c \pi_{a,\mu}^\mu \delta \phi^a, \quad (16)$$

da cui

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi_a^\mu} = c \phi_{,\mu}^a \quad (17)$$

$$-\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \phi^a} = c \pi_{a,\mu}^\mu, \quad (18)$$

che generalizzano, in modo naturale, le equazioni di Hamilton.

Anzichè tentare, ora, di quantizzare la teoria, conviene formularla in un modo ancor più generale, che sia applicabile a lagrangiane contenenti derivate dei campi di qualunque ordine.

Con lo stesso metodo che conduce alle equazioni (4) si ottengono, in questo caso, le equazioni del moto

$$(-1)^n \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^a_{, \mu_1 \mu_2 \dots \mu_n}} \right)_{, \mu_1 \mu_2 \dots \mu_n} = 0, \quad (19)$$

dove, oltre alla somma sugli indici μ_i , è sottintesa anche quella su n , su tutti i valori, incluso lo 0, corrispondenti a derivate presenti nella densità di lagrangiana. D'ora in avanti, applicheremo sempre, nelle espressioni come questa, tale convenzione.

Definiamo un momento coniugato per ogni derivata:

$$\pi_a^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n} = \frac{1}{c^n} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^a_{, \mu_1 \mu_2 \dots \mu_n}}. \quad (20)$$

Invertiamo le (20) per ricavare i $\phi^a_{, \mu_1 \mu_2 \dots \mu_n}$ in funzione dei $\pi_a^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n}$, e definiamo la densità di hamiltoniana

$$\mathcal{H} = c^n \pi_a^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n} \phi^a_{, \mu_1 \mu_2 \dots \mu_n} - \mathcal{L}, \quad (21)$$

funzione solo dei momenti.

Variamo la (21):

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{H} &= c^n \phi^a_{, \mu_1 \mu_2 \dots \mu_n} \delta \pi_a^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n} + c^n \pi_a^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n} \delta \phi^a_{, \mu_1 \mu_2 \dots \mu_n} + \\ &- \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^a_{, \mu_1 \mu_2 \dots \mu_n}} \delta \phi^a_{, \mu_1 \mu_2 \dots \mu_n}. \end{aligned} \quad (22)$$

Data la definizione (20), il secondo e il terzo termine si semplificano, e si ottengono le equazioni di Hamilton

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi_a^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n}} = c^n \phi^a_{, \mu_1 \mu_2 \dots \mu_n} \quad (23)$$

$$-\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \phi^a} = -(-1)^n c^n \pi_a^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n}, \quad (24)$$

dove la seconda equazione è conseguenza delle equazioni del moto e del fatto che \mathcal{H} non dipende da ϕ^a .

Nella meccanica quantistica ordinaria, il primo membro delle equazioni di Hamilton può essere ottenuto, a parte il fattore $i\hbar$, come commutatore

delle variabili dinamiche con H . Se definiamo un commutatore generalizzato, dotato di indici:

$$[\phi^a, \pi_b^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n}]_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_m} = i \hbar_m \delta_b^a \delta_m^n \delta_{\nu_1}^{\mu_1} \delta_{\nu_2}^{\mu_2} \dots \delta_{\nu_m}^{\mu_m} \quad (25)$$

$$[\phi^a, \phi^b]_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_m} = [\pi_a^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n}, \pi_b^{\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_l}]_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_m} = 0, \quad (26)$$

possiamo ottenere anche i primi membri delle (23) e (24) come commutatori:

$$[\phi^a, \mathcal{H}]_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n} = i \hbar_n c^n \phi_{, \mu_1 \mu_2 \dots \mu_n}^a \quad (27)$$

$$\frac{1}{N(a) D^n \hbar_n} [\pi_a^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n}, \mathcal{H}]_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n} = -(-1)^n i c^n \pi_{a, \mu_1 \mu_2 \dots \mu_n}^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n}, \quad (28)$$

dove $N(a)$ è il numero di ordini di derivazione, del campo ϕ^a , presenti nella densità di lagrangiana, e il termine $N(a)D^n$, sommato su n , conta il numero dei commutatori sommati, e compare a denominatore per dare peso unitario a tale somma. Si ottiene, così, il corretto primo membro della (24).

Si noti, in queste formule, la sostituzione di \hbar con delle costanti dipendenti da n : \hbar_n . Ciò è necessario per ragioni dimensionali. Essendo i momenti ricavati da una densità di lagrangiana, anzichè da una lagrangiana, \hbar_1 non può essere uguale a \hbar . Essendo i diversi momenti ricavati usando derivate dei ϕ^a di ordine diverso, gli \hbar_n non possono essere tra loro uguali. Sempre per ragioni dimensionali è necessario, nella (28), portare \hbar_n a denominatore del primo membro, anzichè a numeratore del secondo.

Se si hanno pretese limitate, nei confronti della teoria, l'introduzione di queste nuove costanti fisiche può essere soddisfacente. Vi è però il desiderio di trovare una teoria ultima di tutti i fenomeni naturali, che unifichi tutti i campi e non contenga parametri arbitrari. Come conciliare l'introduzione di nuove costanti con l'aspirazione a ridurne il numero il più possibile? Va osservato che, in una teoria ultima, si possono accettare fino a tre costanti, aventi dimensioni indipendenti. Infatti, un cambiamento di tali costanti può essere compensato da un cambiamento delle unità di misura delle tre grandezze lunghezza, tempo e massa. Data una soluzione della teoria con le costanti originali, con quelle nuove esisterà una soluzione perfettamente identica, ma riferita ad unità diverse. Poichè, però, tali unità si usano per misurare tutte le grandezze nell'universo, questo cambiamento non è osservabile. Se, per esempio, si muta il valore di una costante che ha le dimensioni di una lunghezza, ciò si traduce in una dilatazione o contrazione di tutto l'universo. Poichè anche i regoli, con cui si misurano le distanze, saranno dilatati o contratti, il cambiamento non è osservabile. I valori delle tre costanti citate sono dunque convenzionali, e possono essere scelti arbitrariamente, in base alle unità di misura che, storicamente, si sono affermate. L'introduzione di

ulteriori parametri, che avranno dimensioni ricavabili da quelle dei tre precedenti, crea invece arbitrî reali. Infatti, il rapporto tra due costanti, con le stesse dimensioni, non dipende dalle unità di misura, e la sua modifica altera le leggi fisiche in modo osservabile.

Nella teoria, che stiamo costruendo, uno dei tre parametri, che possiamo scegliere liberamente, è la velocità della luce. Gli altri possono essere due tra gli \hbar_n , o, equivalentemente, \hbar e una lunghezza caratteristica ℓ . Forse, la teoria ultima contiene solo due ordini di derivazione, e le costanti, presenti nella sua densità di lagrangiana, si fondono con gli \hbar_n , in modo da non generare nuovi parametri. In caso contrario, pare che si debba indebolire un po' la teoria e supporre, per esempio, che la lunghezza caratteristica, necessaria per convertire \hbar in un \hbar_n , sia la stessa per ogni n . Ciò non è così insensato. Se esiste una lunghezza fondamentale, e la si usa come unità, insieme alla velocità della luce, in modo da rendere adimensionali tutte le lunghezze e le velocità, appare naturale scrivere, nella (25), \hbar al posto di \hbar_m : una sola costante per tutti gli m , ovvero una sola lunghezza caratteristica (ℓ). In tal caso,

$$\hbar_n = \frac{\hbar \ell^{n-D}}{c^{n-1}}. \quad (29)$$

Poichè esiste già, in fisica, una lunghezza caratteristica, costruita con la costante di gravitazione universale, la costante di Planck, e la velocità della luce, e chiamata lunghezza di Planck, e poichè la gravitazione, o, meglio, una sua generalizzazione: la supergravità (in un numero di dimensioni maggiore di quattro), pare il miglior candidato per unificare tutti i campi, è possibile che ℓ vada identificata con tale lunghezza, in modo che la densità di lagrangiana non aggiunga nuovi parametri.

In ogni caso, noi continueremo ad usare il simbolo \hbar_n , con il suo indice, e a supporre arbitrario il numero dei valori di tale indice.

Le equazioni operatoriali (27) e (28), coi commutatori definiti dalle (25) e (26), costituiscono già una teoria quantistica, in una rappresentazione analoga a quella di Heisenberg. Vogliamo però tentare di esprimerla nell'analogo della rappresentazione di Schrödinger.

Un operatore $I + \varepsilon C$, dove I è l'identità e ε un parametro numerico infinitesimo, applicato a un vettore di stato $|\Psi\rangle$, lo trasforma in

$$|\Psi'\rangle = |\Psi\rangle + \varepsilon C|\Psi\rangle. \quad (30)$$

La stessa trasformazione, agendo su un operatore O lo trasformerà in un certo O' . L'applicazione di O' a $|\Psi\rangle$, seguita dalla trasformazione del vettore risultante, deve produrre lo stesso effetto di O applicato a $|\Psi'\rangle$:

$$(I + \varepsilon C)O'|\Psi\rangle = O|\Psi'\rangle \quad (31)$$

$$\begin{aligned}
O'|\Psi\rangle &= (I - \varepsilon C)O|\Psi\rangle \\
O'|\Psi\rangle &= (I - \varepsilon C)O(I + \varepsilon C)|\Psi\rangle \\
O'|\Psi\rangle &= [O - \varepsilon(CO - OC)]|\Psi\rangle \\
O' &= O + \varepsilon[O, C], \tag{32}
\end{aligned}$$

dove si sono tralasciati gli infinitesimi di ordine superiore.

Dunque la trasformazione, che agisce sui vettori di stato secondo la (30), agisce sugli operatori secondo la (32).

Nella meccanica quantistica ordinaria, l'operatore che trasforma gli stati, facendoli evolvere di un tempo infinitesimo, è la hamiltoniana. Per questo, la variazione temporale dei vettori di stato si ottiene applicando ad essi H , e la variazione temporale degli operatori, facendone il commutatore con H .

Le equazioni (27) e (28) ci dicono che \mathcal{H} trasforma gli operatori aggiungendo ad essi le derivate a secondo membro. Siamo dunque indotti a pensare a un'equazione di Schrödinger, in cui \mathcal{H} agisce sul vettore di stato (una certa funzione d'onda), generando le stesse derivate del vettore di stato stesso. Tuttavia, tali derivate sono diverse da commutatore a commutatore, e questi commutatori portano indici e cambiano variando gli indici. Ipotizziamo, allora, la coesistenza di diverse realtà, in ciascuna delle quali sia valido un particolare commutatore. Si può pensare che l'operatore ϕ^a assuma, nelle diverse realtà, le diverse rappresentazioni

$$\phi^a = i\hbar_n \frac{\partial}{\partial \pi_a^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n}}, \tag{33}$$

mentre i $\pi_a^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n}$ rimangono, sempre, tutti, tra loro commutanti, e possono essere associati ad operatori moltiplicativi.

Ad ogni realtà, ovvero ad ogni momento, ovvero ad ogni equazione (27), associamo una funzione d'onda $\Psi^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n}$, più una funzione d'onda ausiliaria (χ), associata alla variabile ϕ^a , ovvero all'equazione (28).

Le diverse espressioni (33) non debbono rappresentare grandezze diverse, ma essere diversi aspetti dello stesso ϕ^a , perchè, a destra delle (23), o, equivalentemente, delle (27), i ϕ^a sono gli stessi. Ciò si realizza, associando a ϕ^a una sola funzione d'onda.

L'azione di \mathcal{H} , mediante il commutatore, su una variabile dinamica, in una data realtà, sarà equivalente alla sua azione su una data funzione d'onda. Non è però detto che gli indici portati dal commutatore siano gli stessi di quelli della funzione d'onda, così come non è detto che la funzione, che subisce la trasformazione associata al primo membro delle equazioni (27) e (28), sia la stessa che subisce quella associata al secondo membro. Le combinazioni degli indici debbono invece essere scelte in coerenza con l'invarianza di Lorentz.

Nel limite classico, quando le funzioni d'onda saranno tutte piccate attorno ad un unico valore, la distinzione tra le diverse realtà scomparirà e varranno le equazioni di Hamilton classiche.

Si ottengono, allora, le seguenti equazioni di Schrödinger:

$$\begin{cases} i\hbar_n c^n \chi_{, \mu_1 \mu_2 \dots \mu_n} = \mathcal{H} \Psi_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n} \\ -(-1)^n i\hbar_n c^n \Psi_{, \mu_1 \mu_2 \dots \mu_n}^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n} = \mathcal{H} \chi, \end{cases} \quad (34)$$

dove gli indici spazio-temporali sono innalzati o abbassati, usando la metrica piatta

$$\eta_{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}. \quad (35)$$

Le $\Psi^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n}$ e χ non sono funzionali, ma ordinarie funzioni dei $\pi_a^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n}$, oltre che degli x^μ , e permettono di calcolare la densità di probabilità (ρ), dei possibili valori dei momenti, nei vari punti dello spazio-tempo:

$$\rho = \chi^* \chi + \Psi_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n}^* \Psi^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n}. \quad (36)$$

Si noti, che la parte reale di $\Psi^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n}$ è accoppiata alla parte immaginaria di χ , e la parte immaginaria di $\Psi^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n}$ a quella reale di χ , ma le coppie ($\text{Re}[\Psi^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n}], \text{Im}[\chi]$) e ($\text{Im}[\Psi^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n}], \text{Re}[\chi]$) costituiscono mondi distinti, che non interferiranno mai l'uno con l'altro. Tali mondi hanno, a parte un segno meno convenzionale, identiche dinamiche. Si può, pertanto, scegliere $\Psi^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n}$ reale e χ immaginario, o viceversa, in modo da avere, come nella meccanica quantistica ordinaria, una singola componente reale della funzione d'onda, per ogni variabile dinamica che compare nelle equazioni di Hamilton. Potremmo, quindi, riscrivere le (34) e la (36), facendo comparire solo grandezze reali. Noi preferiremo non fare ciò, e, anzichè ricordare che tutte le quantità sono reali, tenere presente che una è reale e l'altra immaginaria.

Tre obiezioni sorgono immediate:

1. Le funzioni d'onda, fornendo distinte probabilità per i diversi punti dello spazio-tempo, non possono tener conto delle possibili correlazioni tra variabili calcolate in punti diversi (cosa che può invece fare un funzionale). Se, per esempio, è presente una sola particella, la funzione d'onda può dirci che vi è una certa probabilità di trovarla nel punto A e un'altra probabilità di trovarla nel punto B . Ma come introdurre l'informazione che, se essa viene trovata in A , non sarà trovata in B , e viceversa?

2. Per la presenza del segno meno nella componente $0,0$ della metrica, ρ non è definita positiva. È dunque possibile che si generino probabilità negative.
3. Non sappiamo se la probabilità, definita dalla (36), si conserva.

Per rispondere alla prima obiezione, osserviamo, che l'informazione, sul fatto che vi è, in totale, una sola particella, è conservata in un punto di un qualche strumento di misura, attraverso il valore che ivi assume un certo campo. Lo strumento di misura interagisce, in ogni punto, con l'onda che si sta studiando, e, punto per punto, determina il numero delle particelle presenti. Tutti questi dati migrano, attraverso lo strumento, dalla posizione in cui sono stati raccolti, a un punto comune in cui vengono sommati. Qui rimane conservata l'informazione sul numero delle particelle. Il funzionamento dello strumento, in una schematizzazione semplificata, può essere descritto dalla fisica classica, che, sappiamo, deve valere come limite, essendo, la teoria che stiamo costruendo, una generalizzazione delle equazioni di Hamilton (23) e (24). Dunque, il processo di misura avverrà correttamente, e, al termine, l'informazione sarà contenuta in una variabile classica, non soggetta alle fluttuazioni quantistiche. Il fatto che punti diversi possano venir correlati, è permesso dalla presenza, tra le variabili dinamiche, dei momenti dei diversi ordini, cioè delle derivate dei campi dei diversi ordini. Una correlazione, valida in un punto, tra un campo, e la sua derivata spaziale prima, è una correlazione tra i valori del campo in quel punto e in quelli ad esso immediatamente vicini. Ripetendo tale correlazione da punto a punto, è possibile mettere in relazione anche luoghi lontani. Nel paragrafo dedicato agli esempi, vedremo un modello un po' più quantitativo di queste idee, insieme al suggerimento, che esse possono originare fenomeni nuovi, non previsti dall'ordinaria teoria quantistica dei campi.

Rispondiamo, ora, alla terza obiezione. La conservazione della probabilità non è così importante. Se anche essa non si realizzasse, è possibile, in analogia con la teoria dei "molti mondi", pensare all'integrale di ρ , su un certo intervallo, non come ad una probabilità, ma come al numero di "realtà", coi momenti in quell'intervallo, esistenti nel punto di coordinate x^μ . Per avere la probabilità, bisognerà, quindi, normalizzare ρ , con una costante moltiplicativa diversa, per ogni punto dello spazio-tempo.

Similmente si risolve la seconda obiezione. Se anche vi fossero, in un dato punto dello spazio-tempo, valori dei momenti, per i quali la densità di probabilità è negativa, si può pensare, che tali momenti si presentino in due stati, uno per il quale ρ è positivo, e uno per il quale è negativo. Il rapporto, tra l'integrale di ρ , sui suoi valori positivi, e quello, sui suoi valori negativi, cambiato di segno, fornirà il rapporto tra le probabilità dei due stati. Tali

probabilità vanno poi normalizzate, in modo che la loro somma faccia 1. Per ognuno dei due stati, la parte di ρ che gli corrisponde (dopo l'eventuale cambiamento di segno e la normalizzazione) darà la densità di probabilità dei valori dei momenti.

Un'altra questione va sottolineata. ρ è uno scalare. Se fosse funzione solo di una variabile vettoriale (π^μ), e lo spazio-tempo fosse curvo, il suo integrale dovrebbe essere eseguito nel seguente modo:

$$\int \sqrt{-g} \rho d^D \pi, \quad (37)$$

dove g è il determinante della metrica $g_{\mu\nu}$ e $\sqrt{-g} d^D \pi$ è una quantità invariante, che misura l'estensione dell'elemento di ipervolume.

Dunque, per calcolare le probabilità è necessario, oltre a ρ , conoscere anche g , o, se vogliamo, la densità di probabilità efficace non è ρ , ma $\sqrt{-g} \rho$.

Nel nostro caso, la metrica è piatta e $\sqrt{-g} = 1$. Nel caso curvo $\sqrt{-g}$ non è 1, ma è comunque ininfluenza, se è funzione nota delle sole coordinate, in quanto viene assorbito dalla costante di normalizzazione. Diventa, invece, importante nella teoria della gravitazione.

Se abbiamo, allora, a che fare con un ρ funzione di più momenti, con un numero arbitrario di indici, da cosa deve essere sostituito $\sqrt{-g}$?

Poniamoci, per semplicità, in due dimensioni, e siano du^μ e dv^μ due vettori infinitesimi. L'area (Lorentz-invariante) del parallelogramma, che ha tali vettori per lati, è

$$V_{\mu\nu} du^\mu dv^\nu, \quad (38)$$

dove $V_{\mu\nu}$ è un certo tensore, che risulta dato da

$$V_{\mu\nu} = \sqrt{-g} (\delta_\mu^0 \delta_\nu^1 - \delta_\nu^0 \delta_\mu^1). \quad (39)$$

Se du^μ è l'incremento di π^0 , e dv^μ l'incremento di π^1 , l'area (38) diviene

$$\sqrt{-g} d\pi^0 d\pi^1, \quad (40)$$

che è l'elemento d'area presente nella (37).

Se, anzichè con vettori, abbiamo a che fare con tensori con due indici, avremo bisogno di quattro di essi, per averne uno per ogni loro componente. Si dovrà, allora, scrivere l'elemento invariante

$$V_{\mu_1\mu_3} V_{\mu_2\mu_4} V_{\nu_1\nu_2} V_{\nu_3\nu_4} du^{\mu_1\nu_1} dv^{\mu_2\nu_2} dw^{\mu_3\nu_3} dz^{\mu_4\nu_4}, \quad (41)$$

che, se i quattro tensori infinitesimi sono gli incrementi delle componenti di $\pi^{\mu\nu}$, diviene

$$(\sqrt{-g})^4 d\pi^{00} d\pi^{01} d\pi^{10} d\pi^{11}. \quad (42)$$

In modo analogo, si procede, quando si ha a che fare con un tensore con più indici, e con un diverso numero di dimensioni. Se si hanno più tensori, con numeri di indici diversi, si moltiplicano gli elementi invarianti di ciascun tensore. Alla fine compare il prodotto di tutti gli incrementi infinitesimi, per una potenza di $\sqrt{-g}$ pari al numero dei $V_{\mu_1\mu_2\dots\mu_D}$ necessari. Tale potenza è

$$(\sqrt{-g})^{\sum_a \sum_n nD^{n-1}}. \quad (43)$$

Nel caso piatto, essa è uguale a 1.

Ancora una questione. Nella teoria classica, vi possono essere lagrangiane, di ordini diversi, che conducono alle stesse equazioni del moto, ad esempio $\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\phi_{,\mu}\phi^{,\mu}$ e $\mathcal{L} = \frac{1}{2}\phi\phi_{,\mu}^{,\mu}$, oppure le due formulazioni della teoria della gravità, mediante la metrica, o mediante il “vielbein” e la “connessione di spin”. Io non ho esaminato se le teorie quantistiche, discendenti da tali lagrangiane, siano equivalenti. Se così non fosse, dovrebbero essere considerate teorie distinte, che coincidono nel limite classico, ma si discostano l’una dall’altra nel caso quantistico. Forse, il rasoio di Occam potrebbe far preferire l’una rispetto all’altra.

A fronte di tutti questi punti delicati, l’approccio descritto presenta notevolissimi vantaggi:

1. È manifestamente covariante. Ciò non è solo un vantaggio estetico, ma anche pratico, in quanto garantisce la presenza dell’invarianza di Lorentz, senza doverla faticosamente testare sulla teoria finale.
2. È applicabile a lagrangiane contenenti derivate di qualunque ordine. Questo generalizza la meccanica quantistica ordinaria, che sembrava limitata alle derivate del prim’ordine. Inoltre, non soffre della presenza di campi privi di derivate, che vengono quantizzati allo stesso modo degli altri.
3. Non genera equazioni funzionali, ma ordinarie equazioni differenziali. Esse sono quasi semplici da risolvere, e non necessitano di rinormalizzazione. Ciò, tra l’altro, fa ben sperare per una risoluzione dei problemi legati alla quantizzazione della gravità.
4. La densità di hamiltoniana è funzione solo dei momenti, che, tutti, commutano tra loro. Non sono quindi presenti ambiguità di ordinamento.

Quest’ultimo vantaggio mette in luce un ulteriore punto delicato. Il fatto, che tutti i momenti commutino tra loro, significa che è possibile assegnare, contemporaneamente, il valore esatto di tutte le derivate dei campi, inclusa

quella di ordine 0. Cosa accade, allora, del principio di indeterminazione? Esso, in effetti, scompare, ma ciò non è una novità. Consideriamo, in meccanica quantistica ordinaria, la lagrangiana $L = -\frac{\alpha}{2} (\ddot{x})^2 + \frac{m}{2} (\dot{x})^2$, che generalizza quella per un punto materiale libero in una dimensione, riducendosi ad essa per $\alpha \rightarrow 0$. Inserendo L nell'integrale sui cammini, ed estraendo l'equazione differenziale, cui Ψ deve obbedire, si ottiene un'equazione di Schrödinger per un sistema a due gradi di libertà (x e y), descritto dalla hamiltoniana $H = -\frac{p_y^2}{2\alpha} + yp_x - \frac{m}{2} y^2$, dove y rappresenta \dot{x} . Si può verificare, che questa hamiltoniana genera, per x , la stessa equazione del moto di L . x ed y (cioè \dot{x}) sono, dunque, tra loro commutanti. Risolvendo l'equazione, e facendo un'analisi qualitativa grossolana del risultato, si trova, che, assegnata arbitrariamente un'incertezza (Δx) ad x , quella su \dot{x} parte da un valore iniziale scelto liberamente, e, per tempi sufficientemente brevi, oscilla armonicamente attorno al valore medio $\frac{\hbar}{2m\Delta x}$, che è quello previsto dal principio di indeterminazione. Il periodo di tale oscillazione è $2\pi\sqrt{\frac{\alpha}{m}}$. Per $\alpha \rightarrow 0$, l'oscillazione è rapidissima e si osserva solo il valore medio. Non c'è quindi da stupirsi, se, in una teoria applicabile a lagrangiane di qualunque ordine, tutte le indeterminazioni scompaiono.

3 Generalizzazioni

Vorremmo, ora, rendere la teoria manifestamente covariante, anche rispetto a tutte le altre simmetrie che ci paiono necessarie, in particolare quelle di gauge, in modo che non ci siano dubbi sulla loro presenza, e non sia necessario testarla a posteriori. Ciò si ottiene, lavorando solo con entità ben definite (o "covarianti").

La prima generalizzazione che possiamo fare è quella ad uno spazio-tempo curvo, con una metrica ($g_{\mu\nu}$) funzione nota delle coordinate.

Scriveremo l'azione

$$S = \int \sqrt{-g} \frac{1}{c} \mathcal{L}(\phi^a_{;\mu_1\mu_2\dots\mu_n}) d^D x, \quad (44)$$

con una densità di lagrangiana (\mathcal{L}) scalare, e il punto e virgola, che indica la derivata covariante.

La teoria hamiltoniana classica si ottiene dalle (20), (21), (23), (24), sostituendo tutte le derivate con le derivate covarianti, cioè tutte le virgole con il punto e virgola. Che questa sia la teoria corretta, non v'è dubbio, perchè è la naturale generalizzazione della teoria piatta ad uno spazio-tempo curvo, come lo sono le equazioni del moto che si ottengono dalla lagrangiana nel modo tradizionale.

Le equazioni di Schrödinger saranno, allora, le (34), con la virgola sostituita dal punto e virgola, e con gli indici alzati ed abbassati non da $\eta_{\mu\nu}$, ma da $g_{\mu\nu}$. ρ sarà ancora dato dalla (36), e non occorre tener conto dei fattori $\sqrt{-g}$ nel calcolo delle probabilità, perchè vengono assorbiti dalla costante di normalizzazione.

La seconda generalizzazione è quella ad una teoria con simmetria di gauge interna (teoria “di Yang-Mills”).

L'azione è data da

$$S = \int \frac{1}{c} \mathcal{L} d^D x, \quad (45)$$

con

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_I^{\mu\nu} F_{\mu\nu}^I \quad (46)$$

e

$$F_{\mu\nu}^I = A_{\mu,\nu}^I - A_{\nu,\mu}^I + \zeta f_{JK}^I A_\mu^J A_\nu^K. \quad (47)$$

A_μ^I è il “campo di gauge”, o “potenziale”, o “connessione”, $F_{\mu\nu}^I$ la sua “curvatura”, o “intensità”, ζ la costante “di accoppiamento”. I, J, K sono indici interni, e f_{JK}^I le costanti “di struttura” del “gruppo di gauge”. Gli indici interni sono innalzati e abbassati dalla metrica

$$-\frac{1}{2} f_{IL}^K f_{JK}^L. \quad (48)$$

A_μ^I non è un'entità ben definita (o “covariante”), nel senso che le sue regole di trasformazione non sono quelle suggerite dai suoi indici (in questo caso dall'indice I). Con linguaggio relativistico, si direbbe che A_μ^I non è un tensore. $F_{\mu\nu}^I$, invece, lo è, e può essere considerato una generalizzazione, della differenza $A_{\mu,\nu}^I - A_{\nu,\mu}^I$, che la rende covariante. Lo scriveremo, pertanto,

$$F_{\mu\nu}^I = D_\nu A_\mu^I - D_\mu A_\nu^I, \quad (49)$$

dove D_ν è un'ideale derivata, che genera quantità covarianti. Faremo, quindi, la derivata di \mathcal{L} rispetto a $D_\nu A_\mu^I$, anzichè rispetto a $A_{\mu,\nu}^I$ e a A_μ^I :

$$\begin{aligned} \pi_I^{\mu|\nu} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (D_\nu A_\mu^I)} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F_{\sigma\lambda}^J} \frac{\partial F_{\sigma\lambda}^J}{\partial (D_\nu A_\mu^I)} = \\ &= \frac{1}{c} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F_{\sigma\lambda}^J} \delta_I^J (\delta_\sigma^\mu \delta_\lambda^\nu - \delta_\sigma^\nu \delta_\lambda^\mu) = \frac{2}{c} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F_{\mu\nu}^I} = \\ &= -\frac{1}{c} F_I^{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (50)$$

dove si è sfruttata l'antisimmetria di $F_{\mu\nu}^I$ per lo scambio di μ con ν , e il simbolo $|$ separa l'indice μ , che, insieme a I , corrisponde all'indice a della (20), da ν , che corrisponde a μ_1 .

La densità di hamiltoniana sarà, allora,

$$\begin{aligned}
\mathcal{H} &= c \pi_I^{\mu|\nu} D_\nu A_\mu^I - \mathcal{L} = \frac{c}{2} \pi_I^{\mu|\nu} (D_\nu A_\mu^I - D_\mu A_\nu^I) - \mathcal{L} = \\
&= -\frac{1}{2} F_I^{\mu\nu} F_{\mu\nu}^I - \mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_I^{\mu\nu} F_{\mu\nu}^I = \\
&= -\frac{c^2}{4} \pi_I^{\mu|\nu} \pi_{\mu|\nu}^I.
\end{aligned} \tag{51}$$

E le equazioni di Hamilton

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi_I^{\mu|\nu}} = c D_\nu A_\mu^I \tag{52}$$

$$-\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial A_\mu^I} = c D_\nu \pi_I^{\mu|\nu}, \tag{53}$$

da cui,

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi_I^{\mu|\nu}} - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi_I^{\nu|\mu}} = c F_{\mu\nu}^I \tag{54}$$

$$0 = c D_\nu \pi_I^{\mu|\nu}, \tag{55}$$

ovvero

$$-c \pi_{\mu|\nu}^I = F_{\mu\nu}^I \tag{56}$$

$$0 = D_\nu \pi_I^{\mu|\nu}, \tag{57}$$

che sono le equazioni del moto in forma hamiltoniana e covariante. Essendo $D_\sigma \pi_I^{\mu|\nu}$ la derivata covariante di una entità ben definita:

$$D_\sigma \pi_I^{\mu|\nu} = \pi_{I,\sigma}^{\mu|\nu} + \zeta f_{IJK} A_\sigma^K \pi^{J\mu|\nu}, \tag{58}$$

le (56) e (57) sono le equazioni corrette. La prima definisce il momento, che, sostituito nella seconda, dà la usuale equazione del moto per A_μ^I .

Le equazioni di Schrödinger si ottengono, allora, dalle (34), inserendo l' \mathcal{H} dato dalla (51), e sostituendo le derivate ordinarie con quelle covarianti, che, però, essendo, le funzioni d'onda, prive di indici interni, coincidono con quelle ordinarie:

$$\begin{cases} i\hbar_1 \chi_{,\mu} = -\frac{c}{4} \pi_I^{\nu|\sigma} \pi_{\nu|\sigma}^I \Psi_\mu \\ i\hbar_1 \Psi_{,\nu}^\nu = -\frac{c}{4} \pi_I^{\nu|\sigma} \pi_{\nu|\sigma}^I \chi. \end{cases} \tag{59}$$

L'espressione di ρ rimane inalterata, e, ancora, per calcolare le probabilità, si dovrebbe tener conto, oltre che della metrica dello spazio-tempo, anche di quella per gli indici interni. Anch'essa, però, non dipende dai momenti, ed è quindi ininfluente.

L'ultima generalizzazione, che ci apprestiamo a fare, è quella alla teoria della gravitazione.

Non utilizzeremo il formalismo basato sulla metrica, ma quello, equivalente, che utilizza il "vielbein" (e_m^μ) e la "connessione di spin" (ω_μ^{mn}). Esso è necessario, quando si vuole accoppiare la gravità ai campi fermionici, e risulta, per i nostri scopi, un po' più semplice.

Scelto, in ogni punto dello spazio-tempo, un sistema di riferimento localmente inerziale, gli indici m, n, \dots si riferiscono alle direzioni dei suoi assi. Gli indici μ, ν, \dots alle ordinarie coordinate dello spazio-tempo. Non si confondono m ed n con il significato che gli avevamo precedentemente attribuito, nei simboli $\pi^{\mu_1\mu_2\dots\mu_n}$ e simili.

Date le componenti v^m di un vettore, rispetto al sistema inerziale, il vielbein le trasforma in quelle (v^μ) rispetto al sistema curvilineo globale:

$$v^\mu = e_m^\mu v^m. \quad (60)$$

L'inversa di e_m^μ si indica e_μ^m : $e_m^\mu e_\nu^m = \delta_\nu^\mu$. Anch'essa trasforma indici piatti in indici curvilinei:

$$v_\mu = e_\mu^m v_m. \quad (61)$$

La metrica ordinaria ($g_{\mu\nu}$) è data da

$$g_{\mu\nu} = e_\mu^m e_\nu^n \eta_{mn} \quad (62)$$

o

$$g^{\mu\nu} = e_m^\mu e_n^\nu \eta^{mn}. \quad (63)$$

Gli indici inerziali sono alzati e abbassati da η^{mn} e η_{mn} , quelli curvilinei da $g^{\mu\nu}$ e $g_{\mu\nu}$.

Poichè i sistemi localmente inerziali possono, in ogni punto, essere scelti arbitrariamente, cioè, su di essi, è possibile effettuare trasformazioni di Lorentz qualunque, il sistema possiede simmetria di gauge per tali trasformazioni (oltre all'usuale simmetria per cambiamento delle coordinate globali). ω_μ^{mn} è la connessione per questa simmetria aggiuntiva.

ω_μ^{mn} non è un'entità covariante, lo è invece la sua curvatura $R_{\mu\nu}^{mn}$:

$$R_{\mu\nu}^{mn} = \omega_{\mu,\nu}^{mn} - \omega_{\nu,\mu}^{mn} + \omega_\nu^{mp} \omega_{\mu p}^n - \omega_\mu^{mp} \omega_{\nu p}^n. \quad (64)$$

Il tensore di curvatura di Riemann $R_{\lambda\mu\nu}^\sigma$ è dato da

$$R_{\lambda\mu\nu}^\sigma = e_m^\sigma e_{\lambda n} R_{\mu\nu}^{mn}. \quad (65)$$

ω_μ^{mn} è antisimmetrico per lo scambio di m con n .

L'azione per la gravità, in questo formalismo, è

$$S = \int e \frac{1}{c} \mathcal{L} d^D x, \quad (66)$$

con

$$\mathcal{L} = -\frac{c^4}{\xi G} e_m^\mu e_n^\nu R_{\mu\nu}^{mn}, \quad (67)$$

dove e , il determinante di e_μ^m , è uguale a $\sqrt{-g}$. G è la costante di gravitazione universale (le cui dimensioni dipendono da D), e ξ un valore numerico. Se vogliamo che la forza (F) tra due masse puntiformi m_1 e m_2 , distanti r l'una dall'altra, sia data da

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^{D-2}}, \quad (68)$$

ξ deve valere

$$\xi = 4 \frac{D-2}{D-3} \prod_{j=0}^{D-3} \int_0^\pi \sin^j \varphi d\varphi. \quad (69)$$

Per $D = 4$, $\xi = 16\pi$.

$R_{\mu\nu}^{mn}$ può essere considerato una generalizzazione della differenza $\omega_{\mu,\nu}^{mn} - \omega_{\nu,\mu}^{mn}$, che la rende covariante. Lo scriveremo, pertanto, formalmente,

$$R_{\mu\nu}^{mn} = D_\nu \omega_\mu^{mn} - D_\mu \omega_\nu^{mn}. \quad (70)$$

Abbiamo, allora,

$$\begin{aligned} \pi_{mn}^{\mu|\nu} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (D_\nu \omega_\mu^{mn})} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial R_{\sigma\lambda}^{pq}} \frac{\partial R_{\sigma\lambda}^{pq}}{\partial (D_\nu \omega_\mu^{mn})} = \\ &= \frac{1}{c} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial R_{\mu\nu}^{mn}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial R_{\nu\mu}^{mn}} \right) = -\frac{c^3}{\xi G} (e_m^\mu e_n^\nu - e_m^\nu e_n^\mu), \end{aligned} \quad (71)$$

oltre a

$$\pi_\mu^m = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial e_m^\mu} = -\frac{c^4}{\xi G} (e_n^\nu R_{\mu\nu}^{mn} + e_n^\nu R_{\nu\mu}^{nm}) = -\frac{2c^4}{\xi G} e_n^\nu R_{\mu\nu}^{mn}. \quad (72)$$

Nell'ultimo passaggio si è sfruttata l'antisimmetria di $R_{\mu\nu}^{mn}$, sia per lo scambio di μ con ν , sia per quello di m con n .

La densità di hamiltoniana sarà

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \pi_\mu^m e_m^\mu + c \pi_{mn}^{\mu|\nu} D_\nu \omega_\mu^{mn} - \mathcal{L} = \\ &= \pi_\mu^m e_m^\mu + \frac{c}{2} \pi_{mn}^{\mu|\nu} (D_\nu \omega_\mu^{mn} - D_\mu \omega_\nu^{mn}) - \mathcal{L} = \\ &= \pi_\mu^m e_m^\mu + \frac{c}{2} \pi_{mn}^{\mu|\nu} R_{\mu\nu}^{mn} - \mathcal{L} = \\ &= \pi_\mu^m e_m^\mu (\pi_{pq}^{\sigma|\lambda}), \end{aligned} \quad (73)$$

dove si è sfruttata l'antisimmetria di $\pi_{mn}^{\mu\nu}$ e di $R_{\mu\nu}^{mn}$ per lo scambio di μ con ν , e, nell'ultimo passaggio, si è introdotta l'espressione (71) di $\pi_{mn}^{\mu\nu}$ e quella (67) di \mathcal{L} . La funzione $e_m^\mu(\pi_{pq}^{\sigma|\lambda})$ può essere ricavata invertendo la (71), per esempio, con metodo perturbativo, sviluppando e_m^μ nell'intorno di δ_m^μ .

Le equazioni di Hamilton saranno

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi_\mu^m} = e_m^\mu \quad (74)$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi_{pq}^{\sigma|\lambda}} = cD_\lambda \omega_\sigma^{pq} \quad (75)$$

$$-\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial e_m^\mu} = -\pi_\mu^m \quad (76)$$

$$-\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \omega_\sigma^{pq}} = c\pi_{pq; \lambda}^{\sigma|\lambda}, \quad (77)$$

da cui

$$e_m^\mu(\pi_{pq}^{\sigma|\lambda}) = e_m^\mu \quad (78)$$

$$\pi_\mu^m \frac{\partial e_m^\mu}{\partial \pi_{pq}^{\sigma|\lambda}} = cD_\lambda \omega_\sigma^{pq} \quad (79)$$

$$0 = \pi_\mu^m \quad (80)$$

$$0 = c\pi_{pq; \lambda}^{\sigma|\lambda}, \quad (81)$$

ovvero

$$e_m^\mu(\pi_{pq}^{\sigma|\lambda}) = e_m^\mu \quad (82)$$

$$\pi_\mu^m \left(\frac{\partial e_m^\mu}{\partial \pi_{pq}^{\sigma|\lambda}} - \frac{\partial e_m^\mu}{\partial \pi_{pq}^{\lambda|\sigma}} \right) = cR_{\sigma\lambda}^{pq} \quad (83)$$

$$0 = \pi_\mu^m \quad (84)$$

$$0 = \pi_{pq; \lambda}^{\sigma|\lambda}, \quad (85)$$

ovvero

$$e_m^\mu(\pi_{pq}^{\sigma|\lambda}) = e_m^\mu \quad (86)$$

$$2\pi_\mu^m \frac{\partial e_m^\mu}{\partial \pi_{pq}^{\sigma|\lambda}} = cR_{\sigma\lambda}^{pq} \quad (87)$$

$$0 = \pi_\mu^m \quad (88)$$

$$0 = \pi_{pq; \lambda}^{\sigma|\lambda}, \quad (89)$$

che sono le equazioni del moto della gravità in forma hamiltoniana e covariante. Il punto e virgola, nell'ultima equazione, è la derivata covariante, sia rispetto agli indici curvilinei, sia rispetto a quelli piatti. Utilizza, perciò, sia la usuale connessione ricavata dalla metrica, sia la connessione di spin. Le prime due equazioni determinano i momenti in termini di e_m^μ e ω_μ^{mn} . Poichè il numero delle equazioni è pari al numero delle incognite, tale determinazione dovrebbe essere unica. Una soluzione, che dovrebbe quindi essere la sola, si trova, osservando che la (71) risolve sicuramente la prima equazione. Moltiplicando la seconda per $\frac{\partial \pi_{pq}^{\sigma|\lambda}}{\partial e_n^\nu}$, si trova che anch'essa è risolta dalla (71) e dalla (72). Sostituendo la (71) nella quarta equazione, si ottiene una relazione sicuramente verificata, perchè $\pi_{pq}^{\sigma|\lambda}$ dipende solo dal vielbein, la cui derivata covariante, come quella della metrica, è nulla. Tale relazione dovrebbe permettere di ricavare ω_μ^{mn} in termini di e_m^μ . Sostituendo nella (72), si trova che π_μ^m è il tensore di curvatura di Ricci, a parte la moltiplicazione per una costante, e la conversione di un indice da curvilineo a piatto. La terza equazione, che ne impone l'uguaglianza a 0, è l'usuale equazione del moto del campo di gravità.

Le equazioni di Schrödinger sono, allora,

$$\begin{cases} i\hbar_0\chi = \pi_\nu^n e_n^\nu (\pi_{pq}^{\sigma|\lambda})\Psi \\ i\hbar_1 c\chi_{,\mu} = \pi_\nu^n e_n^\nu (\pi_{pq}^{\sigma|\lambda})\Psi_\mu \\ -i\hbar_0\Psi + i\hbar_1 c\Psi_{,\nu}^\nu = \pi_\nu^n e_n^\nu (\pi_{pq}^{\sigma|\lambda})\chi, \end{cases} \quad (90)$$

dove gli indici delle funzioni d'onda sono innalzati e abbassati dalla metrica, funzione del vielbein, funzione dei momenti.

Nell'ultima equazione, dovrebbe comparire la derivata covariante della funzione d'onda con indice. Ma la connessione (per gli indici curvilinei) si ottiene dalle derivate della metrica, che è funzione dei momenti. Poichè essi, e le coordinate, sono variabili indipendenti, le derivate degli uni rispetto alle altre si annullano, e così la connessione.

ρ mantiene la solita espressione, e, per calcolare le probabilità, bisogna, ora, moltiplicare per l'opportuno fattore dipendente dalla metrica, e, quindi, dai momenti. Bisogna tener conto di tutti gli indici curvilinei dei momenti: non solo di quelli associati alla derivazione dei campi, ma anche di quelli già presenti nel campo non derivato. Si deve inoltre tener conto della posizione (in alto o in basso) di tali indici. La metrica per gli indici piatti è η_{mn} , e non dà, quindi, contributo.

Nel formalismo basato sulla metrica, le derivate di $g_{\mu\nu}$ non sono covarianti. Lo è, invece, il tensore di Riemann $R_{\sigma\lambda\mu\nu}$. Esso può essere considerato una generalizzazione della combinazione $\frac{1}{2}(g_{\sigma\nu, \lambda\mu} - g_{\lambda\nu, \sigma\mu} - g_{\sigma\mu, \lambda\nu} + g_{\lambda\mu, \sigma\nu})$, che

la rende covariante. Lo scriveremo, pertanto,

$$R_{\sigma\lambda\mu\nu} = \frac{1}{2} (D_\mu D_\lambda g_{\sigma\nu} - D_\mu D_\sigma g_{\lambda\nu} - D_\nu D_\lambda g_{\sigma\mu} + D_\nu D_\sigma g_{\lambda\mu}). \quad (91)$$

Se, ora, si tenta di calcolare $\pi^{\sigma\nu|\lambda\mu}$, si trova che il risultato dipende dall'ordine, con cui sono scritte le due derivate, nei vari termini di $R_{\sigma\lambda\mu\nu}$, nonché dall'ordine degli indici della metrica, negli stessi termini. Bisogna, quindi, controllare, che la teoria sia a ciò insensibile, oppure non trattare i diversi ordinamenti come variabili indipendenti, ma ricordare che sono la stessa cosa.

4 Esempi

Consideriamo la teoria di un campo scalare reale, libero e privo di massa, definita, nello spazio-tempo piatto, da

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \phi_{,\mu} \phi^{,\mu}. \quad (92)$$

L'equazione del moto classica sarebbe quella di d'Alembert:

$$\phi_{,\mu}^{,\mu} = 0. \quad (93)$$

I momenti sono dati da

$$\pi^\mu = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,\mu}} = -\frac{1}{c} \phi^{,\mu}, \quad (94)$$

e la densità di hamiltoniana da

$$\mathcal{H} = c \pi^\mu \phi_{,\mu} - \mathcal{L} = -\frac{c^2}{2} \pi^\mu \pi_\mu. \quad (95)$$

Si può verificare, che le equazioni di Hamilton corrispondono alla (93).

Le equazioni di Schrödinger sono

$$\begin{cases} i\hbar_1 \chi_{,\mu} = -\frac{c}{2} \pi^\nu \pi_\nu \Psi_\mu \\ i\hbar_1 \Psi^\mu_{,\mu} = -\frac{c}{2} \pi^\nu \pi_\nu \chi. \end{cases} \quad (96)$$

Dalla prima, si ricava

$$\Psi^\mu = -\frac{2i\hbar_1}{c\pi^\nu \pi_\nu} \chi_{,\mu}, \quad (97)$$

che, sostituita nella seconda, dà

$$\chi_{,\mu}{}^{\mu} = -\frac{c^2(\pi^{\nu}\pi_{\nu})^2}{4\hbar_1^2}\chi, \quad (98)$$

equazione analoga a quella di Klein-Gordon, con una massa immaginaria, cioè tachionica. Apparentemente, ciò si traduce nella possibilità di realizzare segnali, che viaggiano più velocemente della luce, e che, come si sa, permetterebbero di comunicare con il passato, con tutti i paradossi dei viaggi nel tempo. In realtà, quando, come in questo caso, la “velocità di gruppo” (v_g) supera la “velocità di fase” (v_f), v_g non è più una stima corretta della velocità dei segnali (v_s). Si dimostra che v_s non può, in ogni caso, superare c , la velocità del “fronte d’onda”. Vi è un’altra obiezione contro le onde tachioniche. Se la loro derivata rispetto alle coordinate spaziali è sufficientemente piccola, il loro valore, anziché oscillare attorno allo zero, può crescere esponenzialmente senza limite. Si dice, nel caso dei campi ordinari, che lo stato di vuoto è instabile, e può precipitare verso nuovi e nuovi stati, senza nulla che lo freni. Nel nostro caso, la funzione d’onda non è un campo ordinario, e non abbiamo un vuoto di cui dover garantire la stabilità. Se anche la funzione d’onda precipitasse verso valori sempre più elevati, la costante di normalizzazione la ricondurrebbe, in ogni punto dello spazio-tempo, a valori ordinari.

La (98) si risolve, cercando soluzioni della forma

$$e^{i(k_i x^i - \omega t)}, \quad (99)$$

dove l’indice i varia su tutte le coordinate spaziali (non sul tempo).

Si ottiene, allora, la relazione di dispersione

$$\frac{\omega^2}{c^2} - k_i k^i = -\frac{c^2(\pi^{\nu}\pi_{\nu})^2}{4\hbar_1^2}, \quad (100)$$

da cui

$$\omega = \pm c \sqrt{k_i k^i - \frac{c^2(\pi^{\nu}\pi_{\nu})^2}{4\hbar_1^2}}. \quad (101)$$

La soluzione sarà, allora,

$$\begin{aligned} \chi = & \int \left(A(k_i, \pi^{\nu}) e^{i\left(k_i x^i - c \sqrt{k_i k^i - \frac{c^2(\pi^{\nu}\pi_{\nu})^2}{4\hbar_1^2}} t\right)} + \right. \\ & \left. + B(k_i, \pi^{\nu}) e^{i\left(k_i x^i + c \sqrt{k_i k^i - \frac{c^2(\pi^{\nu}\pi_{\nu})^2}{4\hbar_1^2}} t\right)} \right) d^{D-1}k, \quad (102) \end{aligned}$$

dove A e B sono arbitrarie funzioni complesse dei k_i e dei π^ν .

La (97) fornirà, poi, Ψ^μ . Bisognerà, quindi, prendere la parte immaginaria di χ e la parte reale di Ψ^μ , o viceversa.

La densità di probabilità, non ancora normalizzata e distinta nelle sue parti positiva e negativa, sarà

$$\rho = \chi^* \chi + \Psi_\mu^* \Psi^\mu. \quad (103)$$

La soluzione formale, costituita da onde con la relazione di dispersione (101), è dunque facile da trovare. Non altrettanto, è interpretarla fisicamente. Se \mathcal{H} fosse più complesso, con termini di massa e di interazione, si aggiungerebbe una funzione d'onda, e quindi un'equazione, e cambierebbe il coefficiente del secondo membro della (98) (e della (97)), mantenendosi funzione solo dei momenti. Tutto rimarrebbe quasi identico, ma con una relazione di dispersione leggermente diversa. Anche l'aggiunta di altri campi, e di altri ordini di derivazione, non renderebbe il sistema particolarmente più complesso. È dunque sorprendente, che delle equazioni, così semplici, possano render conto di tutti i complessi fenomeni naturali.

Per avvicinarci un po' di più ad un'interpretazione fisica, consideriamo i seguenti due operatori:

$$a = \frac{\sqrt{\frac{1}{cl}} \phi + i\sqrt{cl} \pi^0}{\sqrt{2\hbar_1}} \quad (104)$$

$$a^\dagger = \frac{\sqrt{\frac{1}{cl}} \phi - i\sqrt{cl} \pi^0}{\sqrt{2\hbar_1}}, \quad (105)$$

dove l è una lunghezza che non conosciamo, forse dell'ordine di ℓ . a e a^\dagger sono l'uno l'hermitiano coniugato dell'altro, e, per essi, valgono le seguenti relazioni di commutazione:

$$[a, a^\dagger]_0 = 1 \quad (106)$$

$$[a, \pi^i]_0 = [a^\dagger, \pi^i]_0 = 0. \quad (107)$$

a^\dagger e a sono dunque, nella realtà associata all'indice 0, operatori di creazione e annichilazione. Gli autovalori n (interi ≥ 0), di $a^\dagger a$, dovrebbero essere imparentati con il numero delle particelle presenti, nel punto dello spazio-tempo che si sta considerando. Gli stati, a n ben definito, possono essere scelti anche a π^i ben definito, e, in π^i , è nascosta parte dell'informazione sulla quantità di moto (p^i) delle particelle. Infatti, essendo $\pi^i = -\frac{1}{c} \phi^i$, ed essendo p^i l'operatore associato alla derivazione rispetto alle variabili spaziali, segue

$$\pi^i = -\frac{i}{c\hbar} [\phi, p^i]_0. \quad (108)$$

Indicheremo, con $|n\rangle$, l'autofunzione di $a^\dagger a$, corrispondente all'autovalore n . Di nuovo, non bisogna confondere n con i significati che gli avevamo precedentemente attribuito.

Invertendo la (104) e la (105),

$$\phi = \sqrt{\frac{c\hbar_1}{2}} (a + a^\dagger) \quad (109)$$

$$\pi^0 = -i\sqrt{\frac{\hbar_1}{2cl}} (a - a^\dagger), \quad (110)$$

da cui

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= -\frac{c^2}{2} \pi^\nu \pi_\nu = -\frac{c^2}{2} \pi^i \pi_i + \frac{c^2}{2} \pi^0 \pi^0 = \\ &= -\frac{c^2}{2} \pi^i \pi_i - \frac{c\hbar_1}{4l} (a^2 + (a^\dagger)^2 - 2a^\dagger a - 1). \end{aligned} \quad (111)$$

Scritte, inoltre, le funzioni d'onda come

$$\Psi^\mu = \Psi_n^\mu(\pi^i, x^\nu) |n\rangle \quad (112)$$

$$\chi = \chi_n(\pi^i, x^\nu) |n\rangle, \quad (113)$$

dove è sottintesa la somma su n , possiamo sostituire tutto nelle equazioni di Schrödinger (96), per averle in termini delle ampiezze, Ψ_n^μ e χ_n , degli stati di particelle:

$$\begin{aligned} i\hbar_1 \chi_{n,\mu} |n\rangle &= -\Psi_{n\mu} \left[\left(\frac{c}{2} \pi^i \pi_i - \frac{\hbar_1}{4l} (2n-1) \right) |n\rangle + \right. \\ &\left. + \frac{\hbar_1}{4l} \left(\sqrt{n(n-1)} |n-2\rangle + \sqrt{(n+1)(n+2)} |n+2\rangle \right) \right] \end{aligned} \quad (114)$$

$$\begin{aligned} i\hbar_1 \Psi_{n,\nu}^\nu |n\rangle &= -\chi_n \left[\left(\frac{c}{2} \pi^i \pi_i - \frac{\hbar_1}{4l} (2n-1) \right) |n\rangle + \right. \\ &\left. + \frac{\hbar_1}{4l} \left(\sqrt{n(n-1)} |n-2\rangle + \sqrt{(n+1)(n+2)} |n+2\rangle \right) \right], \end{aligned} \quad (115)$$

da cui

$$\begin{aligned} i\hbar_1 \chi_{n,\mu} &= - \left(\frac{c}{2} \pi^i \pi_i - \frac{\hbar_1}{4l} (2n-1) \right) \Psi_{n\mu} + \\ &- \frac{\hbar_1}{4l} \left(\sqrt{(n+2)(n+1)} \Psi_{(n+2)\mu} + \sqrt{(n-1)n} \Psi_{(n-2)\mu} \right) \end{aligned} \quad (116)$$

$$\begin{aligned}
i\hbar_1\Psi_{n,\nu}^\nu = & -\left(\frac{c}{2}\pi^i\pi_i - \frac{\hbar_1}{4l}(2n-1)\right)\chi_n + \\
& -\frac{\hbar_1}{4l}\left(\sqrt{(n+2)(n+1)}\chi_{n+2} + \sqrt{(n-1)n}\chi_{n-2}\right). \quad (117)
\end{aligned}$$

Se l fosse molto grande, in modo da poter trascurare la seconda riga di entrambe le equazioni, esse sarebbero perfettamente analoghe alle (96), e, allo stesso modo, potrebbero essere risolte, con i diversi valori di n , che non interferiscono l'uno con l'altro. Se vi è un numero di particelle fissato, uguale in tutti i punti, in modo che uno solo degli Ψ_n^μ e dei χ_n sia diverso da 0, tale numero si conserva nel tempo. Introducendo, perturbativamente, l'effetto delle seconde righe, gli n si mescolano, e non si conservano più. Tale effetto può avere diverse cause:

1. L'arbitrio con cui abbiamo definito gli stati di particelle, cioè gli operatori a^\dagger e a . Essi potrebbero non essere i creatori e annichilatori delle vere particelle fisiche.
2. Il fatto che n non è il numero di particelle totale, che si dovrebbe conservare, ma il numero in ogni punto, mentre quello totale è addirittura infinito. Queste infinite particelle, muovendosi, possono far variare il loro numero nei singoli punti. Si noti, però, che l'effetto è presente anche per $n = 0$, caso, in cui, anche il numero totale è nullo, e lo stato rappresenta il vuoto.
3. Un reale effetto di creazione o distruzione di particelle, non presente nella teoria quantistica dei campi ordinaria, o corrispondente alla transizione dallo stato ideale di particella presente singolarmente, a quello di particella osservabile fisicamente, che è costituito da tante particelle ideali.
4. Il fatto che, pur generandosi ampiezze non nulle, per valori di n non presenti inizialmente, ciò può non avere effetto sulla probabilità. Infatti, $(\Psi_n^0)^2$ compare col segno meno e può compensare gli altri termini, che compaiono col più. L'ampiezza sarebbe, in tal caso, equivalente alla funzione d'onda nulla, come lo sono, nella meccanica quantistica ordinaria, due funzioni d'onda che differiscono per una fase.

Quale che sia la causa di questo fenomeno, gli $|n\rangle$ sono funzioni regolari di π^0 , e le (102) e (97) generano evoluzioni regolari. Pertanto, le ampiezze saranno regolari, anche nella rappresentazione che tiene conto della natura corpuscolare del campo. Non sono cioè presenti divergenze, che richiedono rinormalizzazione. Se si introducono termini di massa e di interazione, si

aggiungono un'equazione e una funzione d'onda, e si sommano, ad \mathcal{H} , altri termini, dipendenti da π^i , a e a^\dagger . Essi sono ulteriori sorgenti di variazione del numero delle particelle, ma non mutano il quadro generale di regolarità e di non necessità di rinormalizzazione.

Le (116) e (117) sono ben lungi dal permetterci di calcolare il risultato di un urto di particelle, e può anche sorgere il dubbio se esso possa aver luogo. Ci tranquillizza, su questo, il fatto che l'urto deve avvenire anche nel limite classico, con le particelle sostituite da pacchetti d'onda. Se la nostra teoria, nel limite classico, riproduce le corrette equazioni di Hamilton, essa è in grado di descrivere gli urti. Bisogna, a tal fine, tra le altre cose, sostituire π^i con p^i , che non commuta con $a^\dagger a$.

Abbiamo visto, che, ad esempio, per $n = 1$, vi è una singola particella in ogni punto dello spazio. Il numero totale dei corpuscoli è quindi infinito. Se vogliamo, che sia presente una sola particella in totale, ci sarà, in ciascun punto, una combinazione lineare di uno stato con $n = 1$ e di uno con $n = 0$, ma come introdurre l'informazione, che, se la particella viene trovata in un punto, non sarà trovata negli altri?

Poniamoci in una sola dimensione spaziale (più quella temporale), e sia L la lunghezza dell'intervallo in cui ci interessa studiare il campo. Chiameremo L anche l'intervallo stesso, oltre alla sua lunghezza.

$a^\dagger a$ può essere scritto in funzione di ϕ e π^0 :

$$a^\dagger a = \frac{1}{2cl\hbar_1}\phi^2 + \frac{cl}{2\hbar_1}(\pi^0)^2 - \frac{1}{2}. \quad (118)$$

Supponiamo, che, accanto a ϕ e ai suoi momenti, esistano, nella descrizione del sistema, altre variabili: u^1, u^2, \dots, u^M . Esse possono rappresentare nuovi campi, o descrivere, schematicamente, i gradi di libertà di uno strumento di misura. Sia, inoltre, $\Delta x = \frac{L}{M}$.

Se l'equazione del moto di u^1 è

$$u^1 = \frac{1}{2cl\hbar_1}\phi^2 + \frac{cl}{2\hbar_1}(\pi^0)^2 - \frac{1}{2}, \quad (119)$$

esso conterà, in ogni punto, il numero delle particelle presenti.

Se le equazioni del moto di u^2, u^3, \dots sono

$$u^2 = u^1 + u^1_{,1}\Delta x \quad (120)$$

$$u^3 = u^2 + u^2_{,1}\Delta x \quad (121)$$

⋮

essi conteranno, approssimativamente, il numero di particelle nei punti distanti $\Delta x, 2\Delta x, \dots$ da quello in cui ci troviamo. L'intervallo L viene, così, suddiviso in M intervallini, in ciascuno dei quali è misurabile il numero di particelle. Se è presente un'ulteriore variabile (u), con equazione del moto

$$u = u^1 + u^2 + \dots + u^M, \quad (122)$$

u , calcolato nel punto iniziale di L , conta il numero totale, misurabile, di particelle. Se M è sufficientemente grande, in modo che Δx sia più piccolo delle altre lunghezze caratteristiche del sistema, ad esempio $l, a^\dagger a$ si manterrà approssimativamente costante, in ogni intervallino di lunghezza Δx . Anche se, formalmente, in tale intervallino, sono presenti infinite particelle, esse si muoveranno come un tutt'uno, non alterando il numero misurabile in un singolo punto dell'intervallino stesso. È come se il numero di particelle nell'intervallino non fosse infinito, ma pari a quello misurabile, e le particelle non fossero puntiformi, ma avessero estensione Δx . u , nel punto iniziale di L , sarà approssimativamente quantizzato, e la sua determinazione, mediante un'osservazione, fisserà il numero totale delle particelle in L . Più è grande M , più il conteggio è preciso. Per $M \rightarrow \infty$, esso diviene esatto, il numero di variabili infinito, e la funzione d'onda equivalente a un funzionale. Si dovrebbe, quindi, ritrovare la teoria quantistica dei campi ordinaria. Nella realtà, M non sarà infinito, e la nostra teoria si presterà, meglio di quella tradizionale, a descrivere la situazione. Così è tutte le volte, in cui non vi è perfetta correlazione tra tutti i punti dello spazio. Δx appare come un taglio per le alte frequenze. Se esso tende a 0, si ritrovano le divergenze ultraviolette, con la necessità di rinormalizzazione. Essendo Δx non nullo, la teoria si autoregola, non richiedendo rinormalizzazione. Tale autoregolarizzazione è dinamica: dipende dalla struttura dello strumento e di ciò con cui il campo interagisce, e può variare nel tempo. Per Δx sufficientemente piccolo, non vi è differenza rispetto alla teoria tradizionale, ma, se Δx diventa più grande, si possono osservare fenomeni nuovi.

Destiniamo, a lavoro futuro, il cercare, da un lato, di riottenere i risultati già noti della teoria quantistica dei campi ordinaria, dall'altro, lo studiare a fondo i casi in cui la correlazione tra i punti dello spazio è debole, e si attendono fenomeni nuovi. Il primo obiettivo dovrebbe essere difficoltoso e innaturale, il secondo semplice.

Particolarmente interessanti potrebbero essere l'applicazione alla cosmologia e l'applicazione alle stringhe. In quest'ultimo caso, essendo il formalismo manifestamente covariante, potrebbe risultare che le stringhe sono, in realtà, consistenti in qualunque numero di dimensioni dello spazio-tempo.

Riferimenti bibliografici

- [1] *Enciclopedia della Fisica*, a cura R. Fieschi, ISEDI (1976); vol. I, sezione 8: *Meccanica quantistica*, Fiorenzo Duimio.
- [2] F. Mandl and G. Shaw, *QUANTUM FIELD THEORY*, John Wiley & Sons (1984).
- [3] V. Parameswaran Nair, *Quantum Field Theory; A Modern Perspective*, Springer (2005).
- [4] J. Polchinski, *String Theory*, vol. I; *Appendix A: A short course on path integrals*; Cambridge University Press (1998).
- [5] *Enciclopedia delle Scienze Fisiche*, Istituto della Enciclopedia italiana “G. Treccani” (Roma) (1995): *gauge, teorie di*, Massimo Testa.
- [6] David Tong, *Quantum Field Theory* (2006 and 2007), <http://www.damtp.cam.ac.uk/user/tong/qft.html>
- [7] Michael Luke, *PHY2403F Lecture Notes* (2011), <http://www.physics.utoronto.ca/~luke/PHY2403/References.html>
- [8] Michael Luke, *PHY 2404S Lecture Notes* (2003), <http://www.physics.utoronto.ca/~luke/PHY2403/References.html>
- [9] P. J. Mulders, *Quantum Field Theory* (2011), <http://www.nat.vu.nl/~mulders/QFT-0.pdf>
- [10] Bryce S. DeWitt, *Quantum Theory of Gravity. I. The Canonical Theory*, Physical Review 160 (1967), pagg. 1113-1148.
- [11] Bryce S. DeWitt, *Quantum Theory of Gravity. II. The Manifestly Covariant Theory*, Physical Review 162 (1967), pagg. 1195-1239.
- [12] Bryce S. DeWitt, *Quantum Theory of Gravity. III. Applications of the Covariant Theory*, Physical Review 162 (1967), pagg. 1239-1256.
- [13] Karel V. Kuchař, *Canonical quantum gravity* (1993), arXiv:gr-qc/9304012v1 (pagg. 15 e 16)
- [14] I. V. Kanatchikov, *CANONICAL STRUCTURE OF CLASSICAL FIELD THEORY IN THE POLY-MOMENTUM PHASE SPACE* (1997), arXiv:hep-th/9709229v1

- [15] I. V. Kanatchikov, *Precanonical perspective in quantum gravity* (2000),
arXiv:gr-qc/0004066v1
- [16] Paolo Fabbri, *CONSIDERAZIONI SU UNA TEORIA QUANTISTICA
PRECEDENTEMENTE PUBBLICATA* (2016),
<http://pfabbri.interfree.it/covar2.pdf>