

# CONSIDERAZIONI SU UNA TEORIA QUANTISTICA PRECEDENTEMENTE PUBBLICATA\*†

Paolo Fabbri

1 luglio 2016

## Sommario

### **English.**

Recently, I have published an approach to quantum field theory, which seemed to be particularly promising. Unfortunately, it has revealed itself full of mistakes, the heaviest of which is the lack of covariance in gauge theories. On the contrary, the classical limit of the theory, which was questionable, seems to be correct.

### **Italiano.**

Recentemente, ho pubblicato un approccio alla teoria quantistica dei campi, che sembrava particolarmente promettente. Purtroppo, esso si è rivelato carico di errori, il più grave dei quali è la mancata covarianza nelle teorie di gauge. Il limite classico della teoria, che era discutibile, sembra invece corretto.

## Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>La teoria in questione</b>	<b>2</b>
<b>3</b>	<b>Mancata covarianza nelle teorie di gauge</b>	<b>4</b>
<b>4</b>	<b>Il limite classico</b>	<b>7</b>

---

\*<http://pfabbri.interfree.it/covar2.pdf>

†Anche le conclusioni di questo articolo sono sbagliate [9].

# 1 Introduzione

Recentemente, ho pubblicato un approccio alla teoria quantistica dei campi [3], che, pur essendo più simile a quello canonico, che all'integrale sui cammini, tratta tutte le dimensioni dello spazio-tempo, e tutti gli ordini di derivazione presenti nella lagrangiana, allo stesso modo. Esso, inoltre, permetterebbe di mantenere manifeste le simmetrie di gauge, non richiede rinormalizzazione e non è soggetto ad ambiguità di ordinamento.

Purtroppo, questa teoria si è rivelata carica di errori, i più gravi dei quali vorremmo correggere col presente articolo.

# 2 La teoria in questione

Si consideri un'azione della forma

$$S = \int \frac{1}{c} \mathcal{L}(\phi^a_{,\mu_1\mu_2\dots\mu_n}) d^D x, \quad (1)$$

dove  $c$  è la velocità della luce,  $D$  il numero di dimensioni dello spazio-tempo,  $x^\mu$  le coordinate.  $\mathcal{L}$  è la densità di lagrangiana. I  $\phi^a$  sono i campi, con l'indice  $a$  che varia per tener conto di tutti quelli presenti. La virgola indica la derivata parziale, e l'indice  $n$  varia per includere tutti gli ordini di derivazione, incluso lo 0, eventualmente presenti.

La teoria, di cui ci occupiamo, definisce un momento coniugato per ogni derivata:

$$\pi_a^{\mu_1\mu_2\dots\mu_n} = \frac{1}{c^n} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^a_{,\mu_1\mu_2\dots\mu_n}}. \quad (2)$$

Inverte, quindi, queste relazioni, per ricavare i  $\phi^a_{,\mu_1\mu_2\dots\mu_n}$  in funzione dei  $\pi_a^{\mu_1\mu_2\dots\mu_n}$ , e introduce la densità di hamiltoniana

$$\mathcal{H} = c^n \pi_a^{\mu_1\mu_2\dots\mu_n} \phi^a_{,\mu_1\mu_2\dots\mu_n} - \mathcal{L}, \quad (3)$$

dove, oltre alla somma sugli indici ripetuti  $\mu_i$ , è sottintesa anche quella su  $n$ , su tutti gli ordini di derivazione presenti nella densità di lagrangiana. D'ora innanzi, applicheremo sempre, nelle espressioni come questa, tale convenzione.

$\mathcal{H}$  è da scriversi in funzione solo dei momenti.

Si dimostra, che le equazioni del moto possono essere scritte nella forma

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi_a^{\mu_1\mu_2\dots\mu_n}} = c^n \phi^a_{,\mu_1\mu_2\dots\mu_n} \quad (4)$$

$$-\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \phi^a} = -(-1)^n c^n \pi_a^{\mu_1\mu_2\dots\mu_n}, \quad (5)$$

che generalizza, in modo naturale, le equazioni di Hamilton.

Nella meccanica quantistica ordinaria, il primo membro di tali equazioni può essere ottenuto, a parte il fattore  $i\hbar$ , come commutatore delle variabili dinamiche con la hamiltoniana. Se definiamo un commutatore generalizzato, dotato di indici:

$$[\phi^a, \pi_b^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n}]_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_m} = i\hbar_m \delta_b^a \delta_m^n \delta_{\nu_1}^{\mu_1} \delta_{\nu_2}^{\mu_2} \dots \delta_{\nu_m}^{\mu_n} \quad (6)$$

$$[\phi^a, \phi^b]_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_m} = [\pi_a^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n}, \pi_b^{\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_l}]_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_m} = 0, \quad (7)$$

possiamo ottenere anche i primi membri delle (4) e (5) come commutatori:

$$[\phi^a, \mathcal{H}]_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n} = i\hbar_n c^n \phi_{, \mu_1 \mu_2 \dots \mu_n}^a \quad (8)$$

$$\frac{1}{N(a)D^n \hbar_n} [\pi_a^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n}, \mathcal{H}]_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n} = -(-1)^n i c^n \pi_{a, \mu_1 \mu_2 \dots \mu_n}^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n}, \quad (9)$$

dove  $N(a)$  è il numero di ordini di derivazione, del campo  $\phi^a$ , presenti nella densità di lagrangiana, e il termine  $N(a)D^n$ , sommato su  $n$ , conta il numero dei commutatori sommati, e compare a denominatore per dare peso unitario a tale somma. Si ottiene, così, il corretto primo membro della (5).

Per ragioni dimensionali, è stato necessario sostituire  $\hbar$  con delle costanti ( $\hbar_m$ ) dipendenti da  $m$ .

A questo punto, un ragionamento che può lasciare dei dubbi, riguardo alla correttezza del limite classico, mi aveva indotto a postulare, per l'evoluzione quantistica del sistema, le seguenti equazioni di Schrödinger:

$$\begin{cases} i\hbar_n c^n \chi_{, \mu_1 \mu_2 \dots \mu_n} = \mathcal{H} \Psi_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n} \\ -(-1)^n i\hbar_n c^n \Psi_{, \mu_1 \mu_2 \dots \mu_n}^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n} = \mathcal{H} \chi, \end{cases} \quad (10)$$

dove le funzioni d'onda  $\chi$  e  $\Psi^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n}$  non sono funzionali, ma ordinarie funzioni dei momenti, oltre che di  $x^\mu$ . Esse forniscono, in ogni punto dello spazio-tempo, una certa distribuzione di probabilità per i momenti. Si noti, che questi ultimi sono tutti tra loro commutanti, e possono essere associati ad operatori moltiplicativi. Non sono quindi presenti ambiguità di ordinamento nella densità di hamiltoniana. Inoltre, le equazioni di evoluzione non sono equazioni funzionali, ma ordinarie equazioni alle derivate parziali, che non richiedono rinormalizzazione. La principale obiezione, che si può sollevare, è che la funzione d'onda, a differenza di un funzionale, non può tener conto delle correlazioni tra punti diversi dello spazio. In [3] si suggeriva, che, se il campo interagisce, per esempio, con uno strumento di misura, le informazioni, provenienti da tutti i punti in cui avviene l'interazione, possono convergere in un unico punto dello strumento, e qui può rimanere conservato il dato sulle eventuali correlazioni.

A questo punto, avevo tentato di rendere la teoria covariante, oltre che rispetto alla simmetria di Lorentz, anche rispetto a quelle di gauge, cercando di lavorare solo con entità covarianti.

Per una teoria di puro gauge interno (teoria “di Yang-Mills”), avevo ottenuto le equazioni di Schrödinger

$$\begin{cases} i\hbar_1 \chi_{,\mu} = -\frac{c}{4} \pi_I^{\nu|\sigma} \pi_{\nu|\sigma}^I \Psi_\mu \\ i\hbar_1 \Psi^\nu_{,\nu} = -\frac{c}{4} \pi_I^{\nu|\sigma} \pi_{\nu|\sigma}^I \chi, \end{cases} \quad (11)$$

dove  $I$  è un indice interno, il simbolo  $|$  separa  $\nu$ , che, insieme a  $I$ , corrisponde all'indice  $a$  della (2), da  $\sigma$ , che corrisponde a  $\mu_1$ , e

$$\pi_I^{\nu|\sigma} = -\frac{1}{c} F_I^{\nu\sigma}, \quad (12)$$

con  $F_{\nu\sigma}^I$  intensità del campo di gauge  $A_\nu^I$ .

Per la teoria della gravità pura, nel formalismo basato sul “vielbein” e la “connessione di spin”, le equazioni erano

$$\begin{cases} i\hbar_0 \chi = \pi_\nu^n e_n^\nu (\pi_{pq}^{\sigma|\lambda}) \Psi \\ i\hbar_1 c \chi_{,\mu} = \pi_\nu^n e_n^\nu (\pi_{pq}^{\sigma|\lambda}) \Psi_\mu \\ -i\hbar_0 \Psi + i\hbar_1 c \Psi^\nu_{,\nu} = \pi_\nu^n e_n^\nu (\pi_{pq}^{\sigma|\lambda}) \chi, \end{cases} \quad (13)$$

dove i momenti sono dati da

$$\pi_\nu^n = -\frac{2c^4}{\xi G} e_m^\mu R_{\nu\mu}^{nm} \quad (14)$$

e

$$\pi_{pq}^{\sigma|\lambda} = -\frac{c^3}{\xi G} (e_p^\sigma e_q^\lambda - e_p^\lambda e_q^\sigma). \quad (15)$$

$e_n^\nu$  rappresenta il vielbein e  $R_{\nu\mu}^{nm}$  la curvatura della connessione di spin.  $G$  è la costante di gravitazione universale e  $\xi$  un numero, che, in 4 dimensioni, vale  $16\pi$ . La funzione  $e_n^\nu (\pi_{pq}^{\sigma|\lambda})$ , nelle (13), si ottiene invertendo la (15), per esempio, perturbativamente, nell'intorno di  $e_n^\nu = \delta_n^\nu$ .

Non bisogna confondere  $m$  ed  $n$  col significato che avevano precedentemente, nei simboli  $\pi_a^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n}$  e simili.

### 3 Mancata covarianza nelle teorie di gauge

Il primo dubbio che ci viene è che le equazioni di Schrödinger (11), per la teoria di Yang-Mills, sono estremamente simili a quelle per un insieme di campi scalari, privi di massa, liberi ( $\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \phi_{a,\mu}^a \phi_{a,\mu}^a$ ):

$$\begin{cases} i\hbar_1 \chi_{,\mu} = -\frac{c}{2} \pi_a^\nu \pi_\nu^a \Psi_\mu \\ i\hbar_1 \Psi^\mu_{,\mu} = -\frac{c}{2} \pi_a^\nu \pi_\nu^a \chi. \end{cases} \quad (16)$$

Potranno, queste equazioni, generare, in un caso, una teoria interagente, e, nell'altro, una teoria priva di interazioni?

In effetti, le equazioni per la teoria di gauge dovrebbero contenere le derivate covarianti, delle funzioni d'onda, rispetto alle variabili spazio-temporali. Poichè, però, le funzioni d'onda non hanno indici interni, avevamo pensato che le derivate covarianti coincidessero con quelle ordinarie, e, queste ultime, avevamo fatto comparire nelle equazioni. In realtà, le derivate ordinarie, fatte a momenti fissati, non sono covarianti, perchè le trasformazioni di gauge modificano i momenti, e tale modifica può essere diversa nei diversi punti dello spazio-tempo. Si calcoli la derivata, facendo la differenza tra i valori della funzione d'onda in due punti vicini  $A$  e  $B$ , e sia  $P_1$  il momento in  $A$ , prima della trasformazione, e  $P_2$  quello in  $B$ . La trasformazione cambierà  $P_1$  in  $P'_1$ , e  $P_2$  in  $P'_2$ . Il valore  $\Psi(A, P_1)$  della funzione d'onda in  $A$  e  $P_1$ , prima della trasformazione, sarà uguale a quello  $\Psi'(A, P'_1)$  in  $A$  e  $P'_1$ , dopo la trasformazione. Analogamente  $\Psi(B, P_2) = \Psi'(B, P'_2)$ . Per avere un risultato indipendente dalla trasformazione, bisogna quindi calcolare  $\Psi(B, P_2) - \Psi(A, P_1)$  prima della trasformazione, e  $\Psi'(B, P'_2) - \Psi'(A, P'_1)$  dopo. A momento fissato  $P_2 = P_1$ , e, si vorrebbe anche,  $P'_2 = P'_1$ , cosa che non si può, in generale, avere, perchè la trasformazione è diversa da punto a punto.

Per ovviare a questo inconveniente si può sostituire la differenza a momento fissato, che si traduce in  $\Psi(B, P_1) - \Psi(A, P_1)$ , con  $\Psi(B, P_2) - \Psi(A, P_1)$ , qualunque sia  $P_2$ , anche se diverso da  $P_1$ . Bisogna cioè considerare il momento funzione del punto spazio-temporale, e calcolare una derivata "totale" che, oltre alla derivata parziale rispetto alle coordinate, contenga anche la derivata rispetto al momento, moltiplicata per la derivata del momento rispetto alle coordinate:

$$\chi_{,\mu} + \frac{\partial \chi}{\partial \pi_I^{\nu|\sigma}} \pi_{I,\mu}^{\nu|\sigma}, \quad (17)$$

e analogamente per  $\Psi^\nu$ . Ciò è analogo alla derivata "materiale" in fluidodinamica. In questo modo, quando  $P_1$  si trasforma in  $P'_1$ , anche  $P_2$  si trasforma in  $P'_2$  e la covarianza è salva.

Purtroppo, per far ciò, ovvero per sostituire, nella (11), la (17) al posto di  $\chi_{,\mu}$ , e l'analogo al posto di  $\Psi^\nu_{,\nu}$ , bisognerebbe che  $\pi_{I,\mu}^{\nu|\sigma}$  comparisse tra le variabili che descrivono il sistema, o che ci fosse una strada per ricavarlo da esse in modo univoco.

Il massimo che possiamo fare è invece scrivere le equazioni "di continuità"

$$\Omega_{,\mu} = - \frac{\partial \Omega}{\partial \pi_I^{\nu|\sigma}} \pi_{I,\mu}^{\nu|\sigma} - \Omega \frac{\partial \pi_{I,\mu}^{\nu|\sigma}}{\partial \pi_I^{\nu|\sigma}}, \quad (18)$$

che esprimono la conservazione della probabilità, con  $\Omega$  pari alla densità di probabilità, secondo la definizione di [3]:

$$\Omega = \frac{|\chi^* \chi + \Psi_\nu^* \Psi^\nu|}{\int |\chi^* \chi + \Psi_\nu^* \Psi^\nu| d^C \pi}, \quad (19)$$

dove  $C$  è il numero di componenti del momento.

Purtroppo, le (18) non sono sufficienti a determinare univocamente  $\pi_{I,\mu}^{\nu|\sigma}$  in funzione di  $\pi_I^{\nu|\sigma}$  e  $x^\mu$ , sia perchè sono equazioni differenziali, e, quindi, generano soluzioni dipendenti da funzioni arbitrarie, sia perchè il numero delle incognite è superiore a quello delle equazioni. Inoltre, le (18) sono valide se, assegnati  $x^\mu$  e  $\pi_I^{\nu|\sigma}$ , anche  $\pi_{I,\mu}^{\nu|\sigma}$  risulta fissato. Quest'ultimo può invece avere una sua distribuzione di probabilità, e, in tal caso, le (18) valgono per il suo valore medio. Introdurre, nelle equazioni di Schrödinger, il valor medio di  $\pi_{I,\mu}^{\nu|\sigma}$ , e non uno qualunque dei suoi altri possibili valori, pare un arbitrio ingiustificato. Infine, inserire una soluzione delle (18) nelle equazioni di Schrödinger, le renderebbe, probabilmente, integrodifferenziali e non lineari. Ciò, da un lato, ne lederebbe la semplicità, dall'altro, potrebbe rendere necessaria una terza quantizzazione, per trattare le autointerazioni delle funzioni d'onda.

Lo stesso problema è presente nell'applicazione della teoria ad uno spazio-tempo curvo, con una metrica funzione nota delle coordinate, e nella teoria della gravità. In quest'ultimo caso, vi è un ulteriore errore. Alla derivata della funzione d'onda con indice, che compare nella (13), va aggiunto, oltre al termine analogo a quello presente nella (17), l'usuale termine contenente la connessione per gli indici curvilinei. Tale connessione si calcola dalle derivate spazio-temporali prime della metrica, che è funzione del vielbein, che è funzione dei momenti. Dunque anch'essa contiene le derivate prime dei momenti. In [3] avevamo pensato che, essendo, i momenti e le coordinate, variabili indipendenti, le derivate degli uni rispetto alle altre si annullassero, e così la connessione. Ora vediamo che, poichè la trasformazione di gauge può dipendere da  $x^\mu$ , le derivate della funzione d'onda non possono essere fatte a momenti fissati. Dunque questi ultimi e le coordinate non sono indipendenti. In altri termini, se non si introducono, nella giusta posizione, dei parametri che si trasformano come le derivate dei momenti, le derivate delle funzioni d'onda non sono covarianti.

Un tentativo può essere fatto, per salvare la teoria, lasciando le equazioni nella forma data da [3], con le derivate a momenti fissati. Si sostituisce quindi l'invarianza per trasformazioni dipendenti dalle coordinate, con quella per trasformazioni dipendenti dai momenti. Essa è presente in queste equazioni, e potrebbe, nel limite classico, ridursi alla simmetria usuale.

Supponiamo, infatti, le funzioni d'onda piccate attorno ai valori classici dei momenti. Essi saranno funzioni delle coordinate, e, nell'intorno di un punto spazio-temporale, tali funzioni potranno essere invertite. Ad ogni valore dei momenti corrisponderà, quindi, un punto dello spazio-tempo, e una trasformazione dipendente dai momenti sarà una trasformazione dipendente dal punto. Va tenuto presente che ciò, ammesso che sia possibile, rappresenta un'alterazione dei principi in cui crediamo. Inoltre, in un dato punto dello spazio-tempo, la trasformazione non è più la stessa per tutti i valori dei momenti, dunque la metrica, che si usava per rendere covariante l'incremento dei momenti, nell'integrale con cui si calcolano le probabilità, va sostituita con qualcosa che si trasformi in modo diverso, e corretto, per i diversi valori dei momenti. Non pare esserci, tra le variabili che descrivono il sistema, un candidato per tale sostituzione.

Il tentativo di rendere la teoria manifestamente covariante, rispetto alle trasformazioni di gauge, sembra dunque cadere. Rimane la sola, remota, speranza, che, abbandonando la manifesta covarianza, cioè definendo la teoria mediante le (2), (3) e (10), si possa dimostrare che le simmetrie sono in realtà presenti. Nel fare ciò, i momenti vanno interpretati come associati solo alle derivate presenti nella densità di lagrangiana, anche se alcuni indici non varieranno su tutte le dimensioni dello spazio-tempo. Se si scrive la densità di hamiltoniana in funzione delle derivate dei campi, anzichè dei momenti, nemmeno ci si accorge di ciò, e la simmetria di Lorentz si mantiene manifesta. Poichè i momenti commutano tutti tra loro, altrettanto fanno le derivate dei campi, e possono essere associate ad operatori moltiplicativi. Non si confonda la funzione dei momenti  $\phi^a$ , che commuta con tutti i momenti, con l'operatore ausiliario  $\phi^a$ , presente nei commutatori (6) e (7), e nelle equazioni di Hamilton (4) e (5), o (8) e (9), che non commuta con i momenti.

## 4 Il limite classico

Il ragionamento, con cui ci eravamo convinti che le (10) avessero il corretto limite classico, era basato sull'assunzione che, se una derivata spazio-temporale, di un operatore, è data dal suo commutatore con un secondo operatore  $\mathcal{H}$ , l'applicazione di  $\mathcal{H}$ , ad una funzione d'onda  $\Psi$ , fornisca la stessa derivata di  $\Psi$ . In realtà, ciò è vero solo per derivate del prim'ordine. Inoltre, vi era l'assunzione che, nel limite classico, le diverse componenti delle funzioni d'onda fossero, tra loro, intercambiabili, in quanto piccate attorno allo stesso valore. In realtà, tali componenti possono avere lo stesso punto di massimo, ma non essere uguali. La correttezza del limite classico va quindi testata.

Si consideri la teoria di un campo scalare libero, privo di massa:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \phi_{,\mu} \phi^{,\mu} \quad (20)$$

$$\pi^\mu = -\frac{1}{c} \phi^{,\mu} \quad (21)$$

$$\mathcal{H} = -\frac{c^2}{2} \pi^\mu \pi_\mu \quad (22)$$

$$\begin{cases} i\hbar_1 \chi_{,\mu} = -\frac{c}{2} \pi^\nu \pi_\nu \Psi_\mu \\ i\hbar_1 \Psi^\mu_{,\mu} = -\frac{c}{2} \pi^\nu \pi_\nu \chi. \end{cases} \quad (23)$$

Dalla prima delle (23), si ricava

$$\Psi^\mu = -\frac{2i\hbar_1}{c\pi^\nu \pi_\nu} \chi_{,\mu}, \quad (24)$$

che, sostituita nella seconda, dà

$$\chi_{,\mu} = -\frac{c^2 (\pi^\nu \pi_\nu)^2}{4\hbar_1^2} \chi. \quad (25)$$

La (25) è risolta da

$$\begin{aligned} \chi = & \int \left[ A(k_i, \pi^\nu) \exp\left(i(k_i x^i - \omega t)\right) + \right. \\ & \left. + B(k_i, \pi^\nu) \exp\left(i(k_i x^i + \omega t)\right) \right] d^{D-1}k, \end{aligned} \quad (26)$$

con

$$\omega = c \sqrt{k_i k^i - \frac{c^2 (\pi^\nu \pi_\nu)^2}{4\hbar_1^2}}, \quad (27)$$

dove l'indice  $i$  varia sulle coordinate spaziali (non sul tempo), e  $A$  e  $B$  sono arbitrarie funzioni complesse dei  $k_i$  e dei  $\pi^\nu$ .

Poniamoci in due dimensioni, e sia, a un certo tempo  $t$ ,  $\chi(\pi_0, \pi_1, x, t)$  una funzione molto piccata attorno ai valori classici  $\Pi_0(x)$  e  $\Pi_1(x)$  di  $\pi_0$  e  $\pi_1$ . La larghezza ( $\Delta$ ), in  $\pi_0$  e  $\pi_1$ , di tale funzione sia, cioè, molto minore di  $\Pi_0$  e di  $\Pi_1$ . A  $\pi_0$  e  $\pi_1$  fissati,  $\chi$  sarà una funzione molto piccata di  $x$ , la cui larghezza sarà dell'ordine di  $\Delta/\Pi_{0,1}$  e  $\Delta/\Pi_{1,1}$ . Nell'intorno di questo picco,  $\chi$  oscilli molto rapidamente in  $x$ , con numero d'onda  $K(x)$ . Le lunghezze caratteristiche  $\Delta/\Pi_{0,1}$  e  $\Delta/\Pi_{1,1}$  siano molto minori di  $K/K_{,1}$ , in modo che si possa riconoscere un  $K$  ben definito all'interno del picco. Tali lunghezze caratteristiche siano, però, molto maggiori di  $1/K$ , in modo che l'oscillazione



sia rapida, e quindi la larghezza della distribuzione dei  $k$  trascurabile rispetto a  $K$ , e che  $\hbar_1 K$  sia dell'ordine di  $c \Pi_0^2$  e  $c \Pi_1^2$ .

La (26) prevede, a parte una breve fase transitoria, due onde distinte che si propagano nei due versi dello spazio. A una corrisponde la pulsazione  $\omega$ , all'altra  $-\omega$ . Dunque, la condizione iniziale  $\chi(\pi_0, \pi_1, x, t)$  si propagherà, lungo  $x$ , con una delle due possibili velocità di gruppo  $\pm \partial\omega/\partial k$ . La fase transitoria si ha quando le due onde sono sovrapposte. Poichè la larghezza dei due pacchetti d'onda tende a zero nel limite classico, tale fase dura solo un istante.

Un altro grave errore mi aveva fatto ritenere, che, essendo la velocità di gruppo ( $v_g$ ) maggiore di  $c$  e della velocità di fase ( $v_f$ ), la velocità del pacchetto d'onda non coincidesse con  $v_g$ . In effetti, il fenomeno per cui, con  $v_g > c$ ,  $v_g$  non corrisponde alla velocità del segnale, che si mantiene minore di  $c$ , esiste [4] [5], ma non si applica al nostro caso. Il motivo di ciò dovrebbe essere l'estensione limitata del pacchetto combinata con l'assenza di dissipazione. In ogni caso, se, nella (25), si scambiano il ruolo di  $x$  con quello di  $t$ , si ottiene un'equazione di Klein-Gordon, con massa reale, che sappiamo prevedere propagazione regolare alla velocità di gruppo, che è minore di  $c$ . Ripristinando il ruolo originario delle variabili, ciò corrisponde a una propagazione superluminare alla velocità di gruppo. Una simulazione, in cui l'integrale (26) è calcolato numericamente, conferma questo quadro, mostrando che la velocità del centro del pacchetto coincide, con precisione sorprendente, con  $v_g > c > v_f$ . Si osserva inoltre, che  $K$  non varia nel tempo. Se si effettua la stessa simulazione, per la relazione di dispersione suggerita da [4], che è quella per onde elettromagnetiche in un dielettrico, e che prevede dissipazione, si osserva una propagazione sublumina, nonostante  $v_g > c$ .

Il fatto che i nostri pacchetti si muovano a velocità maggiore di  $c$ , e che i segnali superlumini permettano di comunicare con il passato, con tutti i paradossi dei viaggi nel tempo, non deve, tuttavia, gettare cattiva luce sulla teoria. Innanzitutto, non sappiamo, se, a questa propagazione a velocità maggiore di  $c$  della funzione d'onda, corrisponde una reale evoluzione superluminare dei campi. Inoltre, se anche così fosse, la presenza della gravitazione sembra rendere inevitabile la possibilità di viaggiare nel tempo [6] [7] [8], e, in una teoria quantistica, i paradossi non sono antinomie. Supponiamo, infatti, che un evento possa presentarsi in due stati:  $A$  e  $B$ , e che altrettanto possa fare la sua causa. Sia  $A'$  la causa che genera  $A$ , e  $B'$  quella che genera  $B$ . Il principale paradosso è che l'evento può agire sulla causa, ponendola in  $B'$  se esso è in  $A$ , e in  $A'$  se è in  $B$ . In questo modo, nè l'evento  $A$  nè  $B$  sarebbero autocorrelati. Ma, in una teoria quantistica, la causa  $B'$  può evolvere in  $A$ , e  $A'$  in  $B$ , sebbene con probabilità molto basse. Durante tale evoluzione, le probabilità andranno calcolate tenendo conto dei vincoli, oltre che sullo stato

iniziale, anche su quello finale. Ciò magnificherà queste basse probabilità, e si osserverà un'apparente violazione delle leggi fisiche, che rende compatibili stato iniziale e stato finale.

Tornando al nostro pacchetto, abbiamo detto che esso, a  $\pi_0$  e  $\pi_1$  fissati, si propaga in  $x$  con velocità  $\pm\partial\omega/\partial k$ . Ma, dove il pacchetto è sensibilmente diverso da 0,  $\pi_0$  e  $\pi_1$  sono molto prossimi a  $\Pi_0(x)$  e  $\Pi_1(x)$ . Poter tenere  $\pi_0$  e  $\pi_1$  fissati, senza che l'altezza del pacchetto crolli drasticamente, significa che  $\Pi_0$  e  $\Pi_1$  non mutano durante la propagazione, cioè che le loro variazioni temporali  $\delta\Pi_0$  e  $\delta\Pi_1$  si annullano:

$$\begin{aligned}\delta\Pi_0 &= \Pi_{0,0}c\delta t + \Pi_{0,1}\delta x = \\ &= \Pi_{0,0}c\delta t \pm \Pi_{0,1}\frac{\partial\omega}{\partial k}\delta t = 0,\end{aligned}\tag{28}$$

da cui

$$\Pi_{0,0} = \mp \frac{\Pi_{0,1}}{c} \frac{\partial\omega}{\partial k}.\tag{29}$$

Analogamente per  $\Pi_1$ , e, poichè la propagazione non muta nemmeno  $K$ , per  $K$ . Si ottengono, allora, nel limite classico, le seguenti equazioni del moto:

$$\Pi_{0,0} = \mp \frac{\Pi_{0,1}}{c} \frac{\partial\omega}{\partial k}\tag{30}$$

$$\Pi_{1,0} = \mp \frac{\Pi_{1,1}}{c} \frac{\partial\omega}{\partial k}\tag{31}$$

$$(\hbar_1 K)_{,0} = \mp \frac{(\hbar_1 K)_{,1}}{c} \frac{\partial\omega}{\partial k},\tag{32}$$

dove  $\partial\omega/\partial k$  è calcolato per  $\pi_0 = \Pi_0$ ,  $\pi_1 = \Pi_1$  e  $k = K$ . Introducendo l'espressione di  $\omega$ , si ottiene il sistema

$$\Pi_{0,0} = \mp \left[ 1 - \frac{c^2(\Pi_0^2 - \Pi_1^2)^2}{4(\hbar_1 K)^2} \right]^{-1/2} \Pi_{0,1}\tag{33}$$

$$\Pi_{1,0} = \mp \left[ 1 - \frac{c^2(\Pi_0^2 - \Pi_1^2)^2}{4(\hbar_1 K)^2} \right]^{-1/2} \Pi_{1,1}\tag{34}$$

$$(\hbar_1 K)_{,0} = \mp \left[ 1 - \frac{c^2(\Pi_0^2 - \Pi_1^2)^2}{4(\hbar_1 K)^2} \right]^{-1/2} (\hbar_1 K)_{,1}.\tag{35}$$

$\Psi^\mu$  è dato dalle derivate di  $\chi$ , moltiplicate per una funzione dei momenti. Poichè  $\chi$  oscilla molto rapidamente, sia nello spazio che nel tempo, la sua derivazione rispetto alle coordinate, si tradurrà nella derivazione del suo fattore oscillante, lasciando il profilo del picco praticamente inalterato. Anche

tali derivate saranno quindi piccate attorno agli stessi valori di  $\Pi_0$  e di  $\Pi_1$ . Poichè la derivazione di una funzione oscillante non altera il suo periodo, anche il  $K$  sarà lo stesso. La moltiplicazione per una funzione di  $\pi_0$  e  $\pi_1$ , non altera queste proprietà, in quanto il picco è molto pronunciato, e tale moltiplicazione si traduce, praticamente, in quella per una costante.  $\Psi^\mu$  genera quindi le stesse equazioni del moto classiche di  $\chi$ .

Le (33), (34) e (35) vanno confrontate con le giuste equazioni classiche, dedotte dalla densità di lagrangiana. Scritte, facendo comparire solo i momenti, esse sono

$$\Pi_{0,0} = \Pi_{1,1} \quad (36)$$

$$\Pi_{1,0} = \Pi_{0,1}. \quad (37)$$

I due sistemi si presentano, volutamente, con le derivate temporali dei campi a sinistra, eguagliate ad espressioni prive di tali derivate. Ciò dovrebbe permettere di confrontarli: essi saranno equivalenti se le espressioni di destra sono le stesse (solo in tal caso, uguali condizioni iniziali vengono fatte evolvere allo stesso modo). I due sistemi non hanno lo stesso numero di incognite. Ciò, senz'altro, li rende non rigorosamente equivalenti. Si può però domandarsi se essi abbiano soluzioni comuni, cioè se, per opportune condizioni iniziali, le evoluzioni siano le stesse.

Per cercare soluzioni comuni, eguagliamo le derivate temporali previste dal primo sistema con quelle previste dal secondo:

$$\mp \left[ 1 - \frac{c^2(\Pi_0^2 - \Pi_1^2)^2}{4(\hbar_1 K)^2} \right]^{-1/2} \Pi_{0,1} = \Pi_{1,1} \quad (38)$$

$$\mp \left[ 1 - \frac{c^2(\Pi_0^2 - \Pi_1^2)^2}{4(\hbar_1 K)^2} \right]^{-1/2} \Pi_{1,1} = \Pi_{0,1}. \quad (39)$$

Sostituendo la seconda nella prima, semplificando  $\Pi_{1,1}$ , e facendo il reciproco di ambo i membri,

$$1 - \frac{c^2(\Pi_0^2 - \Pi_1^2)^2}{4(\hbar_1 K)^2} = 1, \quad (40)$$

da cui

$$\Pi_0^2 = \Pi_1^2, \quad (41)$$

ovvero

$$\Pi_0 = \mp \Pi_1, \quad (42)$$

che, sostituita nella (39), dà una relazione identicamente soddisfatta. Dobbiamo, ora, verificare che il vincolo (42) si conserva nel tempo, cioè che, assegnato come condizione iniziale, esso continua a valere nei tempi successivi.

A questo scopo, ne facciamo la derivata temporale:

$$\Pi_{0,0} = \mp \Pi_{1,0}, \quad (43)$$

e vi introduciamo le derivate rispetto al tempo date dalle leggi del moto (36) e (37):

$$\Pi_{1,1} = \mp \Pi_{0,1}. \quad (44)$$

La (44) non contiene derivate temporali, e, in virtù della (42), è soddisfatta.

Dunque, scelto arbitrariamente, per esempio,  $\Pi_1$ , all'istante iniziale, se si sceglie  $\Pi_0$  in accordo con la (42), il limite classico della teoria quantistica coincide con la teoria classica. Se si sceglie  $\Pi_0$  diversamente, le due evoluzioni si discostano l'una dall'altra, qualunque sia  $\hbar_1 K$ .

Nel vincolo (42) riconosciamo le equazioni del moto ( $\phi_{,0} = \mp \phi_{,1}$ ) delle due soluzioni indipendenti del nostro sistema, scritto in termini di  $\phi$ :  $\phi_{,00} = \phi_{,11}$ . La soluzione generale, di questo, è la combinazione lineare di tali soluzioni. Esse rappresentano onde, che si propagano, nei due casi, nei due versi opposti dell'asse  $x$ .

Dunque, in generale, non ritroviamo le equazioni del moto classiche, ma si può pensare, che la giusta descrizione quantistica, del sistema classico, sia mediante una combinazione lineare dei due stati, che si propagano nei due versi. Quando uno dei due viene riconosciuto, la sua evoluzione è in accordo con le leggi classiche. Quando i due stati sono sovrapposti, per un effetto quantistico, l'evoluzione è modificata.

In altre parole, se si ha a che fare con una combinazione dei due stati, non bisogna sommare i campi, ma le funzioni d'onda, pena l'alterazione del comportamento classico.

Vedremo ora, se, aggiungendo a  $\mathcal{L}$  un termine d'interazione, questa interpretazione possa continuare ad essere sostenuta.

Sia

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \phi_{, \mu} \phi_{, \mu} - \lambda \phi^4, \quad (45)$$

dove  $\lambda$  è una costante di autoaccoppiamento.

Segue

$$\pi = -4\lambda \phi^3 \quad (46)$$

$$\pi^\mu = -\frac{1}{c} \phi_{, \mu} \quad (47)$$

$$\mathcal{H} = -\frac{c^2}{2} \pi^\mu \pi_\mu - \frac{3}{4} \left( \frac{\pi}{4\lambda} \right)^{1/3} \pi \quad (48)$$

$$\begin{cases} i\hbar_0 \chi = \mathcal{H} \Psi \\ i\hbar_1 c \chi_{, \mu} = \mathcal{H} \Psi_\mu \\ -i\hbar_0 \Psi + i\hbar_1 c \Psi_{, \mu}^\mu = \mathcal{H} \chi \end{cases} \quad (49)$$

$$\Psi = \frac{i\hbar_0}{\mathcal{H}} \chi \quad (50)$$

$$\Psi^\mu = \frac{i\hbar_1 c}{\mathcal{H}} \chi,^\mu \quad (51)$$

$$\chi,^\mu = -\frac{\mathcal{H}^2 - \hbar_0^2}{\hbar_1^2 c^2} \chi. \quad (52)$$

La (52) si risolve come in precedenza, con un  $\omega$  dato da

$$\omega = c \sqrt{k_i k^i - \frac{\mathcal{H}^2 - \hbar_0^2}{c^2 \hbar_1^2}}. \quad (53)$$

Se, ora, ci poniamo in due dimensioni, e procediamo come in precedenza, otteniamo

$$\Pi_{,0} = \mp \frac{\Pi_{,1}}{c} \frac{\partial \omega}{\partial k} \quad (54)$$

$$\Pi_{0,0} = \mp \frac{\Pi_{0,1}}{c} \frac{\partial \omega}{\partial k} \quad (55)$$

$$\Pi_{1,0} = \mp \frac{\Pi_{1,1}}{c} \frac{\partial \omega}{\partial k} \quad (56)$$

$$(\hbar_1 K)_{,0} = \mp \frac{(\hbar_1 K)_{,1}}{c} \frac{\partial \omega}{\partial k}, \quad (57)$$

da cui

$$\Pi_{,0} = \mp \left\{ 1 - \frac{\left[ \frac{c^2}{2} (\Pi_0^2 - \Pi_1^2) - \frac{3}{4} \left( \frac{\Pi}{4\lambda} \right)^{1/3} \Pi \right]^2}{c^2 (\hbar_1 K)^2} \right\}^{-1/2} \Pi_{,1} \quad (58)$$

$$\Pi_{0,0} = \mp \left\{ 1 - \frac{\left[ \frac{c^2}{2} (\Pi_0^2 - \Pi_1^2) - \frac{3}{4} \left( \frac{\Pi}{4\lambda} \right)^{1/3} \Pi \right]^2}{c^2 (\hbar_1 K)^2} \right\}^{-1/2} \Pi_{0,1} \quad (59)$$

$$\Pi_{1,0} = \mp \left\{ 1 - \frac{\left[ \frac{c^2}{2} (\Pi_0^2 - \Pi_1^2) - \frac{3}{4} \left( \frac{\Pi}{4\lambda} \right)^{1/3} \Pi \right]^2}{c^2 (\hbar_1 K)^2} \right\}^{-1/2} \Pi_{1,1} \quad (60)$$

$$(\hbar_1 K)_{,0} = \mp \left\{ 1 - \frac{\left[ \frac{c^2}{2} (\Pi_0^2 - \Pi_1^2) - \frac{3}{4} \left( \frac{\Pi}{4\lambda} \right)^{1/3} \Pi \right]^2}{c^2 (\hbar_1 K)^2} \right\}^{-1/2} (\hbar_1 K)_{,1}, \quad (61)$$

dove, all'interno di  $\omega$ , abbiamo trascurato  $\hbar_0$ , perchè siamo nel limite classico.

Queste equazioni debbono essere confrontate con quelle classiche, che, scritte facendo comparire solo i momenti, sono

$$\Pi_{0,0} = 12c\lambda \left( \frac{\Pi}{4\lambda} \right)^{2/3} \Pi_0 \quad (62)$$

$$\Pi_{0,0} = \Pi_{1,1} - \frac{\Pi}{c} \quad (63)$$

$$\Pi_1 = \frac{1}{12c\lambda} \left( \frac{4\lambda}{\Pi} \right)^{2/3} \Pi_{1,1}. \quad (64)$$

Ancora, il secondo sistema contiene un'incognita in meno. Inoltre, vi è un ulteriore grado di libertà in meno, perchè l'evoluzione di  $\Pi_1$  non è determinata assegnando la sua derivata temporale, ma direttamente il suo valore. Non si può quindi scegliere liberamente  $\Pi_1$  come condizione iniziale.

Ancora cercheremo soluzioni comuni dei due sistemi, uguagliando le espressioni delle derivate temporali:

$$\mp \left\{ 1 - \frac{\left[ \frac{c^2}{2} (\Pi_0^2 - \Pi_1^2) - \frac{3}{4} \left( \frac{\Pi}{4\lambda} \right)^{1/3} \Pi \right]^2}{c^2 (\hbar_1 K)^2} \right\}^{-1/2} \Pi_{1,1} = 12c\lambda \left( \frac{\Pi}{4\lambda} \right)^{2/3} \Pi_0 \quad (65)$$

$$\mp \left\{ 1 - \frac{\left[ \frac{c^2}{2} (\Pi_0^2 - \Pi_1^2) - \frac{3}{4} \left( \frac{\Pi}{4\lambda} \right)^{1/3} \Pi \right]^2}{c^2 (\hbar_1 K)^2} \right\}^{-1/2} \Pi_{0,1} = \Pi_{1,1} - \frac{\Pi}{c} \quad (66)$$

$$\mp \left\{ 1 - \frac{\left[ \frac{c^2}{2} (\Pi_0^2 - \Pi_1^2) - \frac{3}{4} \left( \frac{\Pi}{4\lambda} \right)^{1/3} \Pi \right]^2}{c^2 (\hbar_1 K)^2} \right\}^{-1/2} \Pi_{1,1} = \Pi_{0,1}. \quad (67)$$

L'uguaglianza di  $\Pi_{1,0}$  a  $\Pi_{0,1}$ , che si è sfruttata nell'ultima equazione, può essere facilmente dedotta dall'espressione dei momenti in termini di  $\phi$ . In via alternativa, si può derivare rispetto al tempo la (64), e sostituirvi l'espressione (62) di  $\Pi_{0,0}$ , e quella di  $\Pi_{1,0}$ , ottenuta derivando rispetto a  $x$  la (62) stessa. Si ottiene il medesimo risultato.

Le (65), (66) e (67) non contengono derivate temporali, e rappresentano vincoli sulle condizioni iniziali. Ad essi va aggiunto il vincolo (64). Questi quattro vincoli, manipolati per isolare le derivate spaziali dei momenti e  $\hbar_1 K$ , divengono

$$\Pi_{1,1} = 12c\lambda \left( \frac{\Pi}{4\lambda} \right)^{2/3} \Pi_1 \quad (68)$$

$$\Pi_{0,1} = \frac{\Pi \Pi_0 \Pi_1}{c(\Pi_1^2 - \Pi_0^2)} \quad (69)$$

$$\Pi_{1,1} = \frac{\Pi \Pi_1^2}{c(\Pi_1^2 - \Pi_0^2)} \quad (70)$$

$$(\hbar_1 K)^2 = \frac{\Pi_0^2}{c^2(\Pi_0^2 - \Pi_1^2)} \left[ \frac{c^2}{2}(\Pi_0^2 - \Pi_1^2) - \frac{3}{4} \left( \frac{\Pi}{4\lambda} \right)^{1/3} \Pi \right]^2. \quad (71)$$

Scelti arbitrariamente  $\Pi$ ,  $\Pi_0$  e  $\Pi_1$ , in un punto dello spazio, all'istante iniziale, le (68), (69) e (70) li fanno evolvere in tutti gli altri punti. La (71), quindi, determina  $\hbar_1 K$  in tutti tali punti. Il vincolo (68) è senz'altro preservato dall'evoluzione temporale, perchè è identico all'equazione del moto (64). Derivando rispetto al tempo gli altri vincoli, introducendovi le derivate temporali date dalle (62), (63), (61), e da  $\Pi_{1,0} = \Pi_{0,1}$ , e, quindi, le derivate spaziali e l'espressione di  $\hbar_1 K$  date dai vincoli stessi, si ottengono relazioni, contenenti solo i momenti non derivati, identicamente soddisfatte. Dunque, l'evoluzione temporale preserva tutti i vincoli, risultato notevole e nient'affatto automatico.

Le infinite funzioni che, all'istante iniziale, obbediscono ai vincoli, evolvono in accordo con le leggi classiche. Quando due o più di queste funzioni sono sovrapposte, non bisogna combinare (non linearmente) i campi, ma sommare le funzioni d'onda, altrimenti, per un effetto quantistico, l'evoluzione è modificata. Perchè questo quadro sia completo, bisognerebbe, però, che qualunque condizione iniziale potesse essere espressa come combinazione (non lineare) di funzioni che obbediscono ai vincoli. Variando i valori di  $\Pi$ ,  $\Pi_0$  e  $\Pi_1$  in un fissato punto dello spazio, si ottengono tutte tali funzioni.  $\Pi$  dipende solo da  $\phi$ ,  $\Pi_0$  da  $\phi_0$ , e  $\Pi_1$  da  $\phi_1$ . Variare  $\Pi_1$ , nel punto fissato, dovrebbe corrispondere, dunque, a variare, grosso modo, la scala dell'asse  $x$ . Se queste funzioni fossero periodiche, ciò si tradurrebbe nel variare il loro periodo. Variare  $\Pi$ , nel punto fissato, a periodo fissato, equivale a cambiare la fase della funzione  $\phi$ , e, di conseguenza, anche di  $\phi_1$  e di  $\phi_0$ . Il segno di  $\Pi_0$ , nel punto fissato, determina, infine, se la funzione si propaga verso destra o verso sinistra. Avremmo, quindi, una famiglia di funzioni periodiche, simili al seno e al coseno, delle quali si può assegnare liberamente il periodo, la fase e il verso di propagazione. È molto probabile che, su funzioni simili, si possa sviluppare una qualunque condizione iniziale, come in uno sviluppo di Fourier. Assegnando  $\Pi$ ,  $\Pi_0$  e  $\Pi_1$  in un punto, e facendoli evolvere numericamente sull'asse  $x$ , mediante i vincoli (68), (69) e (70), si ottengono proprio delle bellissime funzioni periodiche, la cui frequenza è quasi proporzionale al  $\Pi_1$  iniziale (fig. 1). Si osserva, anche, che  $(\hbar_1 K)^2$  si mantiene maggiore o uguale a zero, e che il modulo, del  $\Pi_0$  iniziale, determina l'ampiezza delle funzioni, e influisce sul periodo.

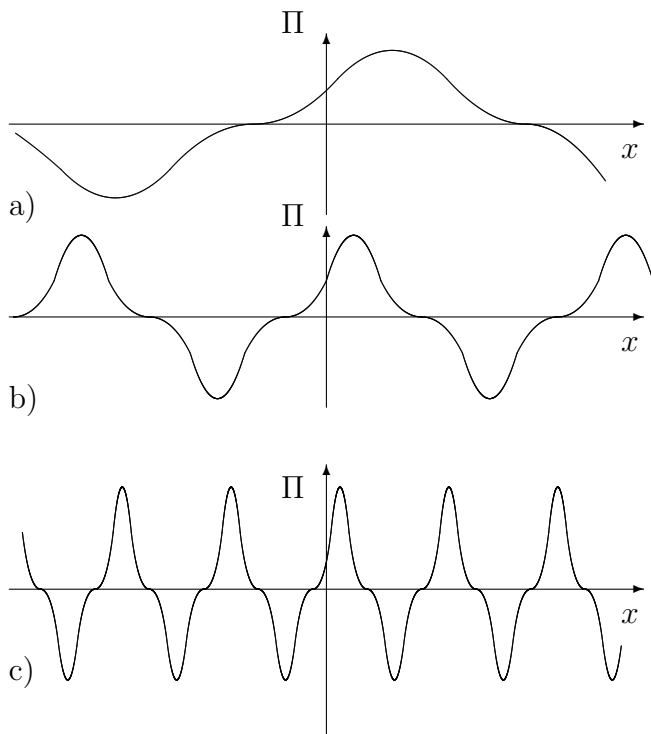


Figura 1: Grafici del  $\Pi(x)$ , che obbedisce ai vincoli, per  $c = \lambda = 1$  e a)  $\Pi(0) = \Pi_0(0) = 1$ ,  $\Pi_1(0) = 0.25$ ; b)  $\Pi(0) = \Pi_0(0) = 1$ ,  $\Pi_1(0) = 0.5$ ; c)  $\Pi(0) = 1$ ,  $\Pi_0(0) = 2$ ,  $\Pi_1(0) = 1.5$ . Le scale dei due assi, e delle tre figure, sono le stesse, e possono essere dedotte dal fatto che, entro la precisione con cui sono disegnate le curve,  $\Pi(0) = 1$ .



Se la correttezza del limite classico verrà confermata anche per le teorie di gauge, definite mediante le (2), (3) e (10), cioè senza far uso di un formalismo manifestamente covariante, e se le simmetrie di gauge non saranno preservate, non è da sottovalutare la possibilità che esse non siano principi fisici generali, ma valgano solo nel limite classico, dove consentono di scrivere lagrangiane non arbitrarie.

Va osservato, che, in questi calcoli, abbiamo assunto che  $\hbar_1 K$  e i momenti si trovassero in una regione tale, che  $\omega$  risulti reale. Per  $\omega$  immaginario il pacchetto d'onda non si propaga verso destra o verso sinistra, ma, solo, si alza o si abbassa. Le derivate temporali dei momenti risultano, quindi, nulle, e non c'è corrispondenza con la teoria classica.

## Riferimenti bibliografici

- [1] I. V. Kanatchikov, *CANONICAL STRUCTURE OF CLASSICAL FIELD THEORY IN THE POLY-MOMENTUM PHASE SPACE* (1997), arXiv:hep-th/9709229v1
- [2] I. V. Kanatchikov, *Precanonical perspective in quantum gravity* (2000), arXiv:gr-qc/0004066v1
- [3] Paolo Fabbri, *UN APPROCCIO MANIFESTAMENTE COVARIANTE ALLA TEORIA QUANTISTICA DEI CAMPI* (2016), <http://pfabbri.interfree.it/covar.pdf>
- [4] Julius Adams Stratton, *Teoria dell'elettromagnetismo*, Einaudi (Torino) (1952); 36. *Velocità di propagazione* (pagg. 461-473).
- [5] Francesco Mainardi, *TRANSIENT WAVES IN LINEAR VISCOELASTIC MEDIA* (1996), nel 1996 queste note erano in attesa di pubblicazione, come capitolo di un volume, edito da World Scientific (Singapore) (1996-97), della serie su *Stability, Vibration and Control of Structures*, editore principale A. Guran.
- [6] John Gribbin, *Costruire la macchina del tempo*, Aporie (Roma) (1994).
- [7] Frank J. Tipler, *Rotating cylinders and the possibility of global causality violation*, Physical Review D 9 (1974), pagg. 2203-2206.
- [8] Matt Visser, *The quantum physics of chronology protection* (2002), arXiv:gr-qc/0204022v2

- [9] Paolo Fabbri, *UN ALTRO ERRORE* (2016),  
<http://pfabbri.interfree.it/covar3.pdf>