

Campi, Particelle ed Evoluzione in una Teoria del Tutto*

Paolo Fabbri

4 aprile 2019

Sommario

English.

We outline the elements allowing us to extract, from a previously published theory of everything, the usually most interesting informations, as the value of fields, the state of particles, the way to compute, numerically, the evolution of the system, and, in line of thought, to check the low energy behaviour.

Italiano.

Vengono delineati gli elementi che permettono di estrarre, da una teoria del tutto precedentemente pubblicata, le informazioni che, solitamente, interessano di più, quali il valore dei campi, lo stato delle particelle, il modo di calcolare, numericamente, l'evoluzione del sistema, e, in linea di principio, di verificare il comportamento di bassa energia.

*<http://pfabbri.interfree.it/toe2.pdf>

Indice

1	Introduzione	2
2	Rappresentazione ed evoluzione degli stati	3
3	Altri campi	6
4	Gradi di libertà del campo gravitazionale	7
5	Operatori di creazione e annichilazione	10
6	Lo stato di vuoto	13
7	Il gravitone	17
8	Il gravitino	18
9	Altri stati di vuoto	20

1 Introduzione

Nel 2017 pubblicai un tentativo [1] di costruire una teoria ultima non arbitraria di tutti i fenomeni naturali, che descriveva lo spazio fisico, supposto discreto, mediante un grafo, i cui vertici erano i punti dello spazio e gli spigoli rappresentavano relazione di contiguità tra i vertici che univano. La teoria era quantistica e localmente supersimmetrica. [1] si chiudeva con la constatazione che queste proprietà sono sufficienti a spiegare tutti i fenomeni noti, purchè, nella lagrangiana di bassa energia, i termini di ordine più basso non risultino avere coefficiente nullo. Tale eventualità, per quanto poco probabile, andrebbe testata, in linea di principio, presumibilmente per via numerica, e, ben difficilmente, le nostre possibilità di calcolo saranno sufficienti per affrontare la questione. Durante la stesura del presente articolo, mi è tuttavia venuto in mente un modo, che può forse risolvere il problema per via analitica, e che potrebbe costituire materia per future ricerche. [1] non è immune da alcune imprecisioni ed errori, non sufficienti, però, per ora, a farne cadere le conclusioni.

In questo articolo, vorremmo delineare gli elementi che permettono di estrarre, da questa teoria, le informazioni che, solitamente, interessano di più, quali il valore dei campi, lo stato delle particelle, il modo di calcolare, numericamente, l'evoluzione del sistema, e come si dovrebbe fare, in linea di principio, per verificare il comportamento di bassa energia.

Il contenuto di [1] non verrà ripetuto. Solo, richiameremo le nozioni essenziali agli scopi di questo articolo, man mano che si renderà necessario.

2 Rappresentazione ed evoluzione degli stati

La nostra teoria ammette la possibilità che si realizzino spazi fisici di qualunque numero di dimensioni, ed anche spazi con numero di dimensioni ambiguo, nonchè transizioni dinamiche da un numero di dimensioni a un altro. Scelto dunque un certo numero di dimensioni, vediamo come può essere costruito uno spazio in assenza di campi.

Osserviamo, che il comportamento noto dei campi è quello di bassa energia. È pertanto sempre possibile ridefinire i campi stessi, per quantità che, apparentemente, modificano il comportamento di alta energia della teoria, ma, in realtà, non ne alterano nè il contenuto fisico, nè il significato che usualmente attribuiamo ai campi. Pertanto, nella definizione degli stati, incluso quello che vogliamo costruire, vi è una certa libertà (o ambiguità). Le scelte, che interessano regioni di estensione piccola, confrontabile con la lunghezza degli spigoli, possono essere effettuate a piacere.

Consapevoli di ciò, fissiamo un sistema di assi cartesiani ortogonali e una unità di misura. Scegliamo quindi quanti vertici (n) vogliamo siano contenuti nell'unità di volume, e la regione \mathcal{R} che vogliamo studiare (che deve essere molto grande confronto a n^{-1}).

Sia \mathcal{R}' una regione, di volume V' , che contenga \mathcal{R} . Generiamo nV' vertici, ciascuno con probabilità uniforme su tutta la regione \mathcal{R}' .

Ora scegliamo il numero medio m di spigoli per ogni vertice. Per ogni vertice, generiamo, con distribuzione di probabilità di Poisson, privata del caso "0 eventi" e avente media m , il numero m^* di parte degli spigoli che si dipartono da esso. Per m^* volte scegliamo la lunghezza coordinata (l) dello spigolo con una certa distribuzione di probabilità f (forse di Maxwell) piccata attorno a un valore dell'ordine della distanza coordinata tra un vertice e quelli ad esso più vicini. (Intendiamo, per lunghezza coordinata, quella calcolata con la usuale metrica euclidea per le coordinate del nostro sistema cartesiano. La lunghezza fisica degli spigoli è uguale per tutti gli spigoli.). Per m^* volte mandiamo uno spigolo dal vertice a quello la cui distanza coordinata da esso è più vicina a l . Scegliamo, con probabilità $1/2$ e $1/2$, il verso di questo spigolo. Ripetiamo tutto per tutti i vertici. Ciò facendo, l'insieme degli spigoli che si dipartono da ogni vertice si arricchisce di altri elementi. Infine, scegliamo lo stato (0 o 1) di ciascun vertice con probabilità $1/2$ e $1/2$.

Se, anzichè in assenza di campi, siamo in presenza di un campo di gravità, prendiamo in considerazione le componenti spaziali g_{ij} della metrica (gli

indici i e j vanno da 1 a $D-1$, dove D è il numero di dimensioni dello spazio-tempo). Anzichè con probabilità uniforme, generiamo i vertici, nella regione \mathcal{R}' , con probabilità proporzionale a \sqrt{g} , dove g è il determinante di g_{ij} . Inoltre, anzichè connettere ogni vertice con quello la cui distanza coordinata è più vicina a l , lo si conetterà con quello per il quale $\sqrt{g_{ij}(x'^i - x^i)(x'^j - x^j)}$ è più vicino a l , dove x'^i e x^i sono le coordinate dei due vertici, e g_{ij} è calcolata nella posizione del primo vertice.

Una combinazione lineare di tanti spazi così costruiti, ognuno con una diversa metrica, fornirà lo stato generale per un universo nello stato \uparrow . Un'analoga combinazione lineare fornirà quello per \downarrow . Una combinazione lineare di \uparrow e \downarrow fornirà infine lo stato complessivo del sistema.

È ora possibile far evolvere ogni spazio della combinazione lineare secondo le regole di \uparrow e di \downarrow . Ad ogni passo temporale, si eseguiranno tutte le transizioni elementari possibili, prendendo nota dell'ampiezza di probabilità di ogni nuovo spazio che viene generato. Si procederà fino a raggiungere il tempo (T) a cui ci interessa conoscere lo stato finale del sistema.

Ad ogni passo, se la transizione trasforma una coppia di vertici in un singolo vertice, si collocherà tale vertice nella posizione intermedia tra i due originari. Se trasforma un vertice in una coppia, si sceglierà a caso, con probabilità uniforme su tutto l'angolo solido, l'orientazione dello spigolo che unirà i vertici della coppia, e con distribuzione f , la sua lunghezza coordinata. Si collocherà poi lo spigolo in modo che la posizione del vertice originario cada sul suo punto medio.

Si segnalano un'imprecisione e un errore in [1]. A causa dell'imprecisione, se si vogliono mantenere le convenzioni usate nel seguito del testo, bisogna scambiare tra loro le ampiezze diagonali delle transizioni elementari di \downarrow . Le ampiezze da usare sono

$$\begin{array}{c|cc} & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & i \\ 1 & -i & -1 \end{array}$$

per \uparrow , e

$$\begin{array}{c|cc} & 0 & 1 \\ \hline 0 & -1 & i \\ 1 & -i & 1 \end{array}$$

per \downarrow . Si tratta solo di un cambiamento di convenzione, non di sostanza.

L'errore consiste nel fatto, che questi valori venivano usati per attribuire un'ampiezza all'intero spazio-tempo e, da una combinazione lineare di diversi spazi-tempo, si ricavano le ampiezze degli stati ai vari istanti di tempo. In realtà, ciò facendo, le ampiezze delle transizioni elementari diventano

ininfluenti, e, anche volendo spingere alle estreme conseguenze quest'impostazione, risulta possibile, selezionando nella combinazione lineare solo gli spazi-tempo che interessano, far sì che lo stato iniziale evolva in qualunque modo scelto a piacere. Pare invece corretto interpretare le ampiezze delle transizioni elementari in modo più usuale, in cui esse, applicate allo stato ad un certo istante, determinano direttamente quello all'istante successivo. Ciò non sembra alterare le proprietà salienti della teoria, e la rende, anzi, più convincente. Ogni transizione elementare avrà una delle ampiezze indicate in tabella. L'ampiezza di una successione di transizioni elementari sarà il prodotto di quelle di tutte le transizioni elementari che la compongono, e il grafo, su cui termina la successione, avrà come ampiezza il prodotto dell'ampiezza della successione per quella del grafo che iniziava la successione stessa. Solo una volta note le ampiezze di tutti i grafi che compongono lo stato finale, e sommate quelle che si riferiscono allo stesso grafo, lo stato potrà essere normalizzato. Nel sommare le ampiezze che si riferiscono a grafi identici, bisogna considerare tali quelli con la stessa topologia, anche se le coordinate dei vertici possono essere diverse. Si noti che, poichè, prima della normalizzazione, l'evoluzione produce stati la cui norma varia nel tempo, i coefficienti della combinazione lineare tra \uparrow e \downarrow variano nel tempo. Si noti inoltre che, sebbene non vi sia interazione propriamente detta tra \uparrow e \downarrow , vi è, però, almeno interferenza, in quanto non è tecnicamente possibile riconoscere in quale dei due stati ci si trova.

Nota dunque lo stato al tempo T , potremo calcolare, all'interno di \mathcal{R} , le grandezze fisiche che ci interessano. Ripeteremo, quindi, tutta la procedura per tanti V' sempre crescenti, e il limite per V' tendente a infinito, delle grandezze che abbiamo calcolato, sarà il loro valore definitivo al tempo T . Si noti che, fissato T , il numero di passi elementari che contiene deve crescere proporzionalmente a V' , perchè tale numero misura, in un certo senso, l'ipervolume dello spazio-tempo, che, fissato l'intervallo di tempo, cresce in proporzione al volume.

Come abbiamo stabilito un metodo per assegnare, ad ogni metrica, un grafo (che descrive uno spazio discreto), così è utile, noto il grafo, saper ricavare la metrica. Ciò ci permette, ad esempio, di ricavare, dalla rappresentazione che abbiamo dato, dello stato al tempo T , la funzione (o funzionale) d'onda espressa in termini della metrica, e, quindi, la probabilità di misurare un certo valore del campo di gravità.

Per fare ciò, determiniamo, per ogni vertice, una metrica nel modo seguente. Scegliamo a caso, con probabilità uniforme, $D(D-1)/2$ (il numero di componenti indipendenti di g_{ij}) spigoli che si dipartono dal vertice. Se il loro numero fosse insufficiente, generiamo quelli mancanti scegliendo a caso, con probabilità uniforme su tutto l'angolo solido, la loro direzione, e la loro lun-

ghezza coordinata uguale alla media delle lunghezze coordinate degli spigoli esistenti. Per ciascuno spigolo, così scelto o costruito, impostiamo l'equazione $g_{ij}(x'^i - x^i)(x'^j - x^j) = l^{*2}$, dove x^i e x'^i sono le coordinate dei due vertici che esso connette, e l^* la posizione del picco della funzione f . Se lo spigolo connette il vertice con se stesso, per non avere un'equazione impossibile, lo sostituiamo con uno la cui orientazione sia scelta con probabilità uniforme su tutto l'angolo solido, e la cui lunghezza coordinata sia scelta con probabilità uniforme sull'intervallo che va da 0 alla metà della distanza coordinata dal vertice a quello ad esso più vicino. Inoltre, se più spigoli, tra quelli scelti, connettono la stessa coppia di vertici, per non avere equazioni dipendenti, ne conserveremo uno solo, e ripeteremo la scelta o la costruzione per gli altri. Per uniformità di trattamento, faremo ciò anche se la coppia di vertici fosse il vertice con se stesso.

Risolviendo il sistema di equazioni così ottenuto, abbiamo, per ciascun vertice, una metrica, che avrà, però, fortissime fluttuazioni, da un vertice ad un altro. Per smussare tali fluttuazioni, suddividiamo V' in tanti volumetti V'' , che dovranno essere molto piccoli confronto a V' , ma sufficientemente grandi per contenere molti vertici. Per ogni volumetto, facciamo quindi la media delle metriche dei vertici in esso contenuti, e assegnamo i valori così ottenuti al punto centrale del volumetto. Infine, se occorre, determiniamo la metrica in tutti i punti, interpolando tra questi valori. V'' va scelto sufficientemente grande per eliminare le fluttuazioni delle lunghezze coordinate degli spigoli, e \mathcal{R} va scelto molto grande confronto a V'' .

3 Altri campi

Tutti i numerosissimi altri parametri, che, oltre al campo di gravità, caratterizzano lo stato del grafo all'interno di un volumetto V'' , appariranno come valori di altrettanti campi, nel punto centrale del volumetto.

Tali parametri sono: il numero di vertici contenuti nel volumetto, le posizioni di tali vertici rispetto al punto centrale; per ognuno di tali vertici, il numero di spigoli che si dipartono da esso, le coordinate, relative al vertice, dei vertici ad esso connessi mediante spigoli, il verso di tali spigoli, lo stato del vertice.

Non tutti questi parametri sono necessari per descrivere il sistema. Vi saranno dunque dei vincoli tra di essi, e i gradi di libertà fisici saranno in numero inferiore. Tra tali vincoli, quello che impone che la metrica nel punto centrale abbia il valore che le abbiamo attribuito, o quelli che impongono che, se il vertice A è connesso al vertice B , anche B sia connesso ad A .

Potendo, il numero dei vertici e il numero degli spigoli, crescere all'infinito, il numero dei campi è, in linea di principio, infinito. Tuttavia, in un tempo finito, solo un numero finito di essi viene eccitato.

Poichè le modifiche di quasi tutti questi campi, inclusa la loro creazione quando sono assenti, interessano, sul grafo, distanze piccolissime, dell'ordine della lunghezza degli spigoli, tali modifiche dovrebbero richiedere energie elevatissime. Le particelle associate a questi campi dovrebbero quindi avere masse elevatissime, dell'ordine della massa di Planck, se, come vedremo, la lunghezza degli spigoli risulta dell'ordine della lunghezza di Planck. Possono però esistere combinazioni di questi campi, analoghe alla metrica, con massa piccola.

4 Gradi di libertà del campo gravitazionale

Volendo comprendere come si costruiscono gli stati di vuoto, di gravitone, ecc., occorre prendere in considerazione il campo di gravità libero, cioè debole, e domandarci quali sono i suoi gradi di libertà fisici.

Scomponiamo la metrica $g_{\mu\nu}$ dello spazio-tempo nella somma della metrica $\eta_{\mu\nu}$ di Minkowski e di una variazione $h_{\mu\nu}$, da essa, che dovrà essere piccola e che può essere considerata il vero campo gravitazionale:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad (1)$$

con

$$\eta_{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Abbassiamo ed innalziamo gli indici con $\eta_{\mu\nu}$ e $\eta^{\mu\nu}$, ed usiamo lettere greche per gli indici spazio-temporali, mentre adotteremo lettere latine per quelli spaziali.

La parte lineare (cioè per campi deboli) delle equazioni di Einstein, in assenza di materia e di termine cosmologico, è

$$-h^\rho_{\rho,\mu\nu} + h^\rho_{\mu,\rho\nu} + h^\rho_{\nu,\rho\mu} - h_{\mu\nu,\rho}{}^\rho = 0. \quad (3)$$

Si dimostra che è sempre possibile, trattandosi di una condizione sulla scelta delle coordinate, imporre la condizione di gauge

$$h^\rho_{\mu,\rho} - \frac{1}{2}h^\rho_{\rho,\mu} = 0. \quad (4)$$

Sostituendo la (4) nella (3) otteniamo

$$h_{\mu\nu, \rho}{}^\rho = 0, \quad (5)$$

che è l'equazione di d'Alembert delle onde ed ha come soluzione

$$h_{\mu\nu} = \frac{1}{(2\pi)^{D-1}} \int \hat{h}_{\mu\nu}(k_i) \exp(i(k_i x^i - \omega t)) d^{D-1}k, \quad (6)$$

dove

$$\omega = -ck_0 = c\sqrt{k_i k^i}, \quad (7)$$

c è la velocità della luce, x^i le coordinate dello spazio e t il tempo.

Bisognerà, poi, prendere la parte reale di $h_{\mu\nu}$.

Sostituendo la (6) nella (4), eseguendo le derivate, invertendo la trasformata di Fourier, e semplificando l'esponenziale temporale:

$$ik_\rho \hat{h}^\rho{}_\mu - \frac{1}{2} ik_\mu \hat{h}^\rho{}_\rho = 0, \quad (8)$$

cioè

$$k_0 \hat{h}^0{}_\mu + k_i \hat{h}^i{}_\mu - \frac{1}{2} k_\mu (\hat{h}^0{}_0 + \hat{h}^i{}_i) = 0, \quad (9)$$

da cui

$$\begin{cases} k^0 \hat{h}_{00} + k^i \hat{h}_{i0} - (1/2)k^0(\hat{h}_{00} - \hat{h}^i{}_i) = 0 \\ k^0 \hat{h}_{0j} + k^i \hat{h}_{ij} - (1/2)k^j(-\hat{h}_{00} + \hat{h}^i{}_i) = 0. \end{cases} \quad (10)$$

Risolvendo la prima per \hat{h}_{00} e sostituendo nella seconda,

$$\begin{cases} \hat{h}_{00} = -2(k^i/k^0)\hat{h}_{i0} - \hat{h}^i{}_i \\ k^0 \hat{h}_{0j} + k^i \hat{h}_{ij} - k^j[(k^i/k^0)\hat{h}_{i0} + \hat{h}^i{}_i] = 0. \end{cases} \quad (11)$$

Scegliamo, ora, l'asse 1 in modo che abbia la stessa direzione e verso del vettore k^i , cosa che si può sempre fare per un fissato k^i , ma bisogna poi cambiare il sistema di riferimento, cambiando k^i . Usiamo lettere maiuscole (I, J, \dots) per gli indici degli assi spaziali perpendicolari all'asse 1.

Separando, nella seconda delle (11), il caso $j = 1$ e il caso $j = J$, e ricordando che $k^J = 0$,

$$\begin{cases} \hat{h}_{00} = -2(k^1/k^0)\hat{h}_{10} - \hat{h}^i{}_i \\ k^0 \hat{h}_{01} + k^1 \hat{h}_{11} - k^1[(k^1/k^0)\hat{h}_{10} + \hat{h}^i{}_i] = 0 \\ k^0 \hat{h}_{0J} + k^1 \hat{h}_{1J} = 0. \end{cases} \quad (12)$$

Ricordando, ora, che, per la (7), $k^0 = k^1$, che $\hat{h}^i{}_i = \hat{h}_{11} + \hat{h}^I{}_I$, e sostituendo la seconda nella prima,

$$\begin{cases} \hat{h}_{00} = -2\hat{h}_{10} - \hat{h}_{11} \\ \hat{h}^I{}_I = 0 \\ \hat{h}_{0J} = -\hat{h}_{1J}. \end{cases} \quad (13)$$

Dunque, per ora, è possibile scegliere liberamente \hat{h}_{ij} , purchè con il vincolo dato dalla seconda equazione, e \hat{h}_{01} . Noti questi, \hat{h}_{0J} e \hat{h}_{00} vengono fissati dalla terza equazione e dalla prima.

La condizione (4), tuttavia, non fissa completamente il gauge: sono ancora possibili trasformazioni di gauge, che lasciano le (13) e la (5) inalterate.

Per capire quali sono queste trasformazioni, scriviamo la più generale trasformazione di coordinate infinitesima

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + \xi^{\mu}, \quad (14)$$

con ξ^{μ} infinitesimo (dell'ordine di $h_{\mu\nu}$). Essa cambia $g_{\mu\nu}$ in

$$g'_{\lambda\rho} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\lambda}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\rho}} g_{\mu\nu} = g_{\lambda\rho} - g_{\lambda\nu} \xi^{\nu}{}_{,\rho} - g_{\mu\rho} \xi^{\mu}{}_{,\lambda}, \quad (15)$$

tralasciando gli infinitesimi di ordine superiore.

Reinterpretando la trasformazione come attiva, si dovrebbe aggiungere, al secondo e terzo membro, il termine $-g_{\lambda\rho,\mu} \xi^{\mu}$, che, però, poichè la derivata di $g_{\lambda\rho}$ fa sparire $\eta_{\lambda\rho}$, è di ordine superiore e verrà, anch'esso, tralasciato.

Sostituendo l'espressione (1) della metrica, abbiamo:

$$h'_{\lambda\rho} = h_{\lambda\rho} - \xi_{\lambda,\rho} - \xi_{\rho,\lambda}, \quad (16)$$

tralasciano gli infinitesimi di ordine superiore.

Affinchè $h'_{\lambda\rho}$ obbedisca la (5), anche ξ_{λ} , oltre ad $h_{\lambda\rho}$, dovrà essere esprimibile mediante un integrale come (6), con un certo $\hat{\xi}_{\lambda}(k_i)$ al posto di $\hat{h}_{\mu\nu}(k_i)$.

La (16) diviene allora

$$\hat{h}'_{\lambda\rho} = \hat{h}_{\lambda\rho} - ik_{\rho} \hat{\xi}_{\lambda} - ik_{\lambda} \hat{\xi}_{\rho}. \quad (17)$$

Sostituendo nelle (13), ed imponendo che esse siano soddisfatte anche da $\hat{h}'_{\lambda\rho}$, rimane

$$\begin{cases} 2k_0 \hat{\xi}_0 = -2(k_0 \hat{\xi}_1 + k_1 \hat{\xi}_0) - 2k_1 \hat{\xi}_1 \\ 2k^I \hat{\xi}_I = 0 \\ k_J \hat{\xi}_0 + k_0 \hat{\xi}_J = -k_J \hat{\xi}_1 - k_1 \hat{\xi}_J. \end{cases} \quad (18)$$

Ricordando che $k_0 = -k_1$ e che $k_I = 0$, si vede che tutte queste relazioni sono identicamente soddisfatte. Esse non vincolano pertanto le D componenti di $\hat{\xi}_\mu$, che possono essere scelte arbitrariamente.

Essendo

$$\hat{h}'_{01} = \hat{h}_{01} - ik_1(\hat{\xi}_0 - \hat{\xi}_1), \quad (19)$$

$$\hat{h}'_{11} = \hat{h}_{11} - 2ik_1\hat{\xi}_1 \quad (20)$$

e

$$\hat{h}'_{I1} = \hat{h}_{I1} - ik_1\hat{\xi}_I, \quad (21)$$

è possibile effettuare tale scelta facendo assumere, a \hat{h}'_{01} , a \hat{h}'_{11} , e a \hat{h}'_{I1} , qualunque valore scelto a piacimento. Fatto ciò, non si potranno più effettuare altre trasformazioni di gauge.

Una possibilità particolarmente comoda è imporre che \hat{h}'_{01} , \hat{h}'_{11} e \hat{h}'_{I1} , insieme a \hat{h}'_{00} e \hat{h}'_{0I} , si annullino.

Dunque, tutte queste grandezze non rappresentano gradi di libertà fisici. Gli unici gradi di libertà che rimangono sono gli \hat{h}'_{IJ} col vincolo $\hat{h}'^I_I = 0$.

5 Operatori di creazione e annichilazione

Tenuto conto dei risultati del paragrafo precedente, l'operatore quantistico h_{ij} potrà esser scritto

$$h_{ij} = \int C(k_l)(\varepsilon_{ij\sigma}(k_l)a^\sigma(k_l)\exp(ik_lx^l) + \varepsilon_{ij\sigma}^*(k_l)a^{\sigma\dagger}(k_l)\exp(-ik_lx^l))d^{D-1}k, \quad (22)$$

dove σ è un indice che varia sui $(D-1)(D-2)/2 - 1$ gradi di libertà fisici del campo gravitazionale. $\varepsilon_{ij\sigma}$ e il suo complesso coniugato $\varepsilon_{ij\sigma}^*$ sono tensori di polarizzazione, che, per ogni k_l , proiettano ogni grado di libertà fisico sugli assi di un fissato sistema di riferimento (indipendente da k_l). La fase di $\varepsilon_{ij\sigma}$ deve essere scelta in modo che $\varepsilon_{ij\sigma}^*(k_l) = \varepsilon_{ij\sigma}(-k_l)$. C è una funzione di k_l , introdotta per comodità, che verrà determinata successivamente, e il termine in $a^{\sigma\dagger}$ compare per garantire che h_{ij} sia hermitiano (reale).

Per comodità, accanto a h_{ij} , introduciamo il campo

$$\varphi^\sigma = \int C(k_l)(a^\sigma(k_l)\exp(ik_lx^l) + a^{\sigma\dagger}(k_l)\exp(-ik_lx^l))d^{D-1}k. \quad (23)$$

Noto φ^σ è possibile risalire a h_{ij} e viceversa.

Affinchè φ^σ obbedisca l'equazione di d'Alembert, la sua lagrangiana sarà

$$L = \int -\frac{c\hbar\ell^{2-D}}{2}\varphi^\sigma{}_{,\mu}\varphi_{\sigma,\mu}d^{D-1}x, \quad (24)$$

dove gli indici σ sono innalzati e abbassati con una metrica euclidea, \hbar è la costante di Planck ridotta, e ℓ una lunghezza caratteristica che compare per ragioni dimensionali.

Da un certo punto di vista, il valore di ℓ può essere scelto arbitrariamente. Infatti, data una soluzione della teoria, parametrizzata da un certo valore di ℓ , basta cambiare l'unità di misura delle lunghezze, per avere una soluzione esattamente identica, ma con un valore diverso del parametro. Poichè, nella teoria, non vi è nulla a privilegiare una unità di misura rispetto ad un'altra, la nuova soluzione, col nuovo ℓ , dovrà essere soluzione anche della teoria con le vecchie unità. Purtroppo, cambiando ℓ , cambia anche il numero n di vertici per unità di volume. Vedremo nel prossimo paragrafo come determinare il legame tra questi due parametri.

Il momento π_σ coniugato a φ^σ sarà

$$\pi_\sigma = \frac{1}{c}\frac{\delta L}{\delta\varphi^\sigma{}_{,0}} = \hbar\ell^{2-D}\varphi_{\sigma,0}, \quad (25)$$

dove il rapporto delle δ indica la derivata funzionale, definita da

$$\frac{\delta\varphi(x^i)}{\delta\varphi(x'^i)} = \delta^{(D-1)}(x^i - x'^i), \quad (26)$$

dove $\delta^{(D-1)}$ è la δ di Dirac $(D-1)$ -dimensionale.

Facciamo evolvere φ^σ :

$$\begin{aligned} \varphi^\sigma &= \int C(k_l)(a^\sigma(k_l)\exp(i(k_lx^l - \omega t)) + \\ &+ a^{\sigma\dagger}(k_l)\exp(-i(k_lx^l - \omega t)))d^{D-1}k, \end{aligned} \quad (27)$$

per avere

$$\begin{aligned} \varphi_{\sigma,0} = \varphi^\sigma{}_{,0} &= -\int i\frac{\omega}{c}C(k_l)(a^\sigma(k_l)\exp(ik_lx^l) + \\ &- a^{\sigma\dagger}(k_l)\exp(-ik_lx^l))d^{D-1}k, \end{aligned} \quad (28)$$

che è stato calcolato per $t = 0$.

Segue

$$\begin{aligned} \pi_\sigma &= -\hbar\ell^{2-D}\int i\frac{\omega}{c}C(k_l)(a^\sigma(k_l)\exp(ik_lx^l) + \\ &- a^{\sigma\dagger}(k_l)\exp(-ik_lx^l))d^{D-1}k. \end{aligned} \quad (29)$$

Per ricavare a^σ e $a^{\sigma\dagger}$, trasformiamo secondo Fourier φ^σ e π_σ :

$$\frac{1}{(2\pi)^{D-1}} \int \varphi^\sigma \exp(-ik_l x^l) d^{D-1}x = C(k_l) a^\sigma(k_l) + C(-k_l) a^{\sigma\dagger}(-k_l) \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \frac{ic}{(2\pi)^{D-1} \hbar \ell^{2-D} \omega} \int \pi_\sigma \exp(-ik_l x^l) d^{D-1}x &= C(k_l) a^\sigma(k_l) + \\ &- C(-k_l) a^{\sigma\dagger}(-k_l). \end{aligned} \quad (31)$$

Sommando e sottraendo membro a membro, dividendo per $2C$, e sostituendo k_l con $-k_l$ in $a^{\sigma\dagger}(-k_l)$:

$$a^\sigma(k_l) = \frac{1}{2(2\pi)^{D-1} C} \int \left(\varphi^\sigma + \frac{ic}{\hbar \ell^{2-D} \omega} \pi_\sigma \right) \exp(-ik_l x^l) d^{D-1}x \quad (32)$$

$$a^{\sigma\dagger}(k_l) = \frac{1}{2(2\pi)^{D-1} C} \int \left(\varphi^\sigma - \frac{ic}{\hbar \ell^{2-D} \omega} \pi_\sigma \right) \exp(ik_l x^l) d^{D-1}x. \quad (33)$$

Possiamo ora calcolare i commutatori tra gli a^σ e gli $a^{\sigma\dagger}$, sfruttando quelli noti tra i φ^σ e i π_σ :

$$\begin{aligned} [a^\sigma(k_l), a^{\sigma\dagger}(k'_l)] &= \frac{-ic}{4(2\pi)^{2(D-1)} \hbar \ell^{2-D} C C'} \int \left(\frac{1}{\omega'} [\varphi^\sigma(x^l), \pi_\sigma(x'^l)] + \right. \\ &- \left. \frac{1}{\omega} [\pi_\sigma(x^l), \varphi^\sigma(x'^l)] \right) \exp(-i(k_l x^l - k'_l x'^l)) d^{D-1}x d^{D-1}x' = \\ &= \frac{c \delta_{\sigma\gamma}}{4(2\pi)^{2(D-1)} \ell^{2-D} C C'} \int \left(\frac{\delta^{(D-1)}(x^l - x'^l)}{\omega'} + \right. \\ &+ \left. \frac{\delta^{(D-1)}(x^l - x'^l)}{\omega} \right) \exp(-i(k_l x^l - k'_l x'^l)) d^{D-1}x d^{D-1}x' = \\ &= \frac{c \delta_{\sigma\gamma}}{4(2\pi)^{2(D-1)} \ell^{2-D} C C'} \int \left(\frac{1}{\omega'} + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{\omega} \right) \exp(-i(k_l - k'_l) x^l) d^{D-1}x = \\ &= \frac{c \delta_{\sigma\gamma}}{4(2\pi)^{D-1} \ell^{2-D} C C'} \left(\frac{1}{\omega'} + \frac{1}{\omega} \right) \delta^{(D-1)}(k_l - k'_l) = \\ &= \frac{c \delta_{\sigma\gamma}}{2(2\pi)^{D-1} \ell^{2-D} C^2 \omega} \delta^{(D-1)}(k_l - k'_l), \end{aligned} \quad (34)$$

dove $C' = C(k'_l)$, $\omega' = \omega(k'_l)$, e $\delta_{\sigma\gamma}$ è la δ di Kronecker.

Scegliendo

$$C^2 = \frac{c}{2(2\pi)^{D-1} \ell^{2-D} \omega}, \quad (35)$$

si ha

$$[a^\sigma(k_l), a^{\gamma\dagger}(k'_l)] = \delta_{\sigma\gamma} \delta^{(D-1)}(k_l - k'_l). \quad (36)$$

Analogamente si verifica che

$$[a^\sigma(k_l), a^\gamma(k'_l)] = [a^{\sigma\dagger}(k_l), a^{\gamma\dagger}(k'_l)] = 0. \quad (37)$$

Dunque, $a^{\sigma\dagger}(k_l)$ e $a^\sigma(k_l)$ sono la generalizzazione al continuo di operatori di creazione e annichilazione, e possono essere pensati come creatori e distruttori di particelle (gravitoni) con vettore d'onda k_l e stato di polarizzazione σ ben definiti. Se si calcolano la hamiltoniana e la quantità di moto del sistema, esse risultano in accordo con le relazioni di de Broglie.

6 Lo stato di vuoto

Per ragioni di comodità, anzichè lavorare direttamente coi campi, preferiremo servirci delle loro trasformate di Fourier. Limitandoci al campo di gravità, rappresenteremo allora gli stati, mediante un funzionale d'onda $\Psi[\hat{\varphi}^\sigma]$ della trasformata di Fourier $\hat{\varphi}^\sigma(k_l)$ del campo φ^σ .

Lo stato di vuoto Ψ_0 sarà definito da

$$a^\sigma(k_l)\Psi_0 = 0 \quad \forall \sigma, k_l \quad (38)$$

e, noto Ψ_0 , lo stato con un gravitone, di polarizzazione σ e vettore d'onda k_l , sarà dato da

$$\Psi_1^\sigma(k_l) = a^{\sigma\dagger}(k_l)\Psi_0. \quad (39)$$

Analogamente, si costruisce lo stato con due gravitoni:

$$\Psi_2^{\sigma\gamma}(k_l, k'_l) = a^{\gamma\dagger}(k'_l)a^{\sigma\dagger}(k_l)\Psi_0, \quad (40)$$

e quelli con un qualunque numero di gravitoni.

Per impostare l'equazione (38) e per sfruttare la (39), la (40), ecc., abbiamo bisogno dell'espressione di a^σ e $a^{\sigma\dagger}$, che noi possediamo in termini di φ^σ e π_σ (equazioni (32) e (33)), ma che ci serve in termini di $\hat{\varphi}^\sigma$ e del suo momento coniugato. Indicheremo tale momento con $\hat{\pi}_\sigma$, ma non è detto che sia la trasformata di Fourier di π_σ .

La trasformata di Fourier di φ^σ è data da

$$\hat{\varphi}^\sigma = (2\pi)^{D-1} C(a^\sigma(k_l) + a^{\sigma\dagger}(-k_l)). \quad (41)$$

Il vincolo che φ^σ sia hermitiano impone

$$\hat{\varphi}^\sigma(-k_l) = \hat{\varphi}^{\sigma\dagger}(k_l). \quad (42)$$

Dunque, solo parte dei $\hat{\varphi}^\sigma$ sono variabili indipendenti: ad esempio quelli per i quali k_l è positivo.

Inoltre, questi $\hat{\varphi}^\sigma$ avranno una parte hermitiana (reale) e una antihermitiana (immaginaria), che andrebbero trattate come variabili indipendenti. Anzichè usare tali variabili, è utile adottare due loro combinazioni lineari: $\hat{\varphi}^\sigma$ stesso e $\hat{\varphi}^{\sigma\dagger}$ (considerati come variabili indipendenti).

Le nostre variabili saranno dunque $\hat{\varphi}^\sigma(k_l)$ e $\hat{\varphi}^{\sigma\dagger}(k_l)$, e faremo variare k_l solo su un suo semispazio. Tuttavia, per ragioni di sintesi, scriveremo anche $\hat{\varphi}^\sigma(-k_l)$ al posto di $\hat{\varphi}^{\sigma\dagger}(k_l)$.

$\hat{\pi}_\sigma$ è dato da

$$\hat{\pi}_\sigma(k_l) = -i\hbar \frac{\delta}{\delta \hat{\varphi}^\sigma(k_l)}, \quad (43)$$

dove, quando k_l appartiene al semispazio che abbiamo scelto di non usare, $\hat{\pi}_\sigma(k_l)$ è il momento coniugato a $\hat{\varphi}^{\sigma\dagger}(-k_l)$.

Per trovare una naturale rappresentazione di $\hat{\pi}_\sigma$, in termini di a^σ e $a^{\sigma\dagger}$, si consideri la seguente trasformazione di variabili (dove i simboli non vanno confusi con quelli usati finora):

$$\begin{aligned} u &= a + b \\ v &= a - b, \end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned} a &= \frac{u + v}{2} \\ b &= \frac{u - v}{2}, \end{aligned}$$

e

$$\frac{\partial}{\partial u} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial a} + \frac{\partial}{\partial b} \right). \quad (44)$$

Nella (41), $\hat{\varphi}^\sigma$ è analogo a u , il termine in $a^\sigma(k_l)$ a a , e quello in $a^{\sigma\dagger}(-k_l)$ a b . Analogo di v sarà una qualche espressione contenente $\hat{\pi}_\sigma$.

In analogia con la (44), si potrà allora scrivere

$$\frac{\delta}{\delta \hat{\varphi}^\sigma(k_l)} = \frac{1}{2(2\pi)^{D-1}C} \left(\frac{\delta}{\delta a^\sigma(k_l)} + \frac{\delta}{\delta a^{\sigma\dagger}(-k_l)} \right), \quad (45)$$

e

$$\begin{aligned} \hat{\pi}_\sigma(k_l) &= \frac{-i\hbar}{2(2\pi)^{D-1}C} \left(\frac{\delta}{\delta a^\sigma(k_l)} + \frac{\delta}{\delta a^{\sigma\dagger}(-k_l)} \right) = \\ &= \frac{i\hbar}{2(2\pi)^{D-1}C} (a^{\sigma\dagger}(k_l) - a^\sigma(-k_l)), \end{aligned} \quad (46)$$

dove, nell'ultimo passaggio, si sono sostituiti $\delta/\delta a^\sigma$ con $-a^{\sigma\dagger}$, e $\delta/\delta a^{\sigma\dagger}$ con a^σ , date le loro relazioni di commutazione.

Si può verificare che le relazioni di commutazione tra i $\hat{\varphi}^\sigma$ e i $\hat{\pi}_\sigma$, così scritti, sono corrette.

Se, anzichè una trasformazione canonica, nello spazio delle fasi, si considera la trasformazione, nello spazio delle configurazioni, che conduce da φ^σ a $\hat{\varphi}^\sigma$, e si deduce la trasformazione indotta sui momenti, si ottiene, per $\hat{\pi}_\sigma$, lo stesso risultato.

Sommando e sottraendo opportunamente la (41) e la (46), si ha

$$a^\sigma(k_l) = \frac{\hat{\varphi}^\sigma(k_l)}{2(2\pi)^{D-1}C} - \frac{(2\pi)^{D-1}C}{i\hbar} \hat{\pi}_\sigma(-k_l) \quad (47)$$

$$a^{\sigma\dagger}(k_l) = \frac{\hat{\varphi}^\sigma(-k_l)}{2(2\pi)^{D-1}C} + \frac{(2\pi)^{D-1}C}{i\hbar} \hat{\pi}_\sigma(k_l), \quad (48)$$

da cui, introducendo le espressioni di C e di $\hat{\pi}_\sigma$,

$$a^\sigma(k_l) = \sqrt{\frac{\ell^{2-D}\omega}{2(2\pi)^{D-1}c}} \hat{\varphi}^\sigma(k_l) + \sqrt{\frac{(2\pi)^{D-1}c}{2\ell^{2-D}\omega}} \frac{\delta}{\delta \hat{\varphi}^\sigma(-k_l)} \quad (49)$$

$$a^{\sigma\dagger}(k_l) = \sqrt{\frac{\ell^{2-D}\omega}{2(2\pi)^{D-1}c}} \hat{\varphi}^\sigma(-k_l) - \sqrt{\frac{(2\pi)^{D-1}c}{2\ell^{2-D}\omega}} \frac{\delta}{\delta \hat{\varphi}^\sigma(k_l)}. \quad (50)$$

L'equazione (38) si scrive allora

$$\sqrt{\frac{\ell^{2-D}\omega}{2(2\pi)^{D-1}c}} \hat{\varphi}^\sigma(k_l) \Psi_0 + \sqrt{\frac{(2\pi)^{D-1}c}{2\ell^{2-D}\omega}} \frac{\delta \Psi_0}{\delta \hat{\varphi}^\sigma(-k_l)} = 0. \quad (51)$$

Le equazioni funzionali non sono così diverse dalle equazioni differenziali ordinarie. Sostituendo la derivata funzionale con la derivata parziale ordinaria, ricordando che vi è un'equazione per ogni valore di k_l e di σ , e sostituendo la sommatoria che risulta con un integrale in $d^{D-1}k$, si ottiene

$$\Psi_0 = \mathcal{N} \exp \left(- \int_+ \frac{\ell^{2-D}\omega}{(2\pi)^{D-1}c} \hat{\varphi}^\sigma(k_l) \hat{\varphi}_\sigma(-k_l) d^{D-1}k \right), \quad (52)$$

dove \mathcal{N} è una costante di normalizzazione, e l'indice $+$ dell'integrale segnala che esso è eseguito solo su un semispazio della variabile k_l , in quanto le equazioni corrispondenti all'altro semispazio sono già, automaticamente, soddisfatte.

Reintroducendo $\hat{\varphi}^{\sigma\dagger}(k_l)$, al posto di $\hat{\varphi}^\sigma(-k_l)$, e scrivendo $\hat{\varphi}^{\sigma*}$ anzichè $\hat{\varphi}^{\sigma\dagger}$, in quanto, più che di un operatore, si tratta ora di una variabile, abbiamo il risultato finale

$$\Psi_0 = \mathcal{N} \exp \left(- \int_+ \frac{\ell^{2-D}\omega}{(2\pi)^{D-1}c} \hat{\varphi}^{\sigma*}(k_l) \hat{\varphi}^\sigma(k_l) d^{D-1}k \right), \quad (53)$$

valido anche se si assumono come variabili $\text{Re}[\hat{\varphi}^\sigma]$ e $\text{Im}[\hat{\varphi}^\sigma]$, anzichè $\hat{\varphi}^\sigma$ e $\hat{\varphi}^{\sigma*}$, in quanto la trasformazione di variabili è lineare, e lo jacobiano introduce solo un coefficiente costante da assorbire in \mathcal{N} .

$\Psi_0^* \Psi_0$ darà le densità di probabilità, nel vuoto, dei $\hat{\varphi}^\sigma$ per ogni k_l , che, come si vede, sono gaussiane indipendenti, centrate attorno allo 0, con varianza dipendente da ℓ , ω e $d^{D-1}k$.

In una trattazione numerica, $d^{D-1}k$ dovrà essere dell'ordine di $1/L'^{D-1}$, dove L' è una lunghezza molto grande confronto all'estensione L del pacchetto d'onda gravitazionale che stiamo considerando. c/ω è una lunghezza variabile tra L' e la minima lunghezza caratteristica delle variazioni del campo gravitazionale, che è dell'ordine di $V''^{1/(D-1)}$, dove V'' è il volume considerato nel paragrafo 2. $\hat{\varphi}^\sigma$ è dell'ordine di $\varphi^\sigma L^{D-1}$, cioè di $h_{ij} L^{D-1}$. Affinchè la deviazione standard di h_{ij} , cioè l'ordine di grandezza di h_{ij} , sia piccola confronto all'unità, condizione che permette di considerare la teoria linearizzata, segue dunque, scegliendo $L' = 100 L$, $\ell \ll L/[100^{D/(D-2)}]$. $V''^{1/(D-1)}$ è molto piccolo confronto a L , e la lunghezza degli spigoli è molto piccola confronto a $V''^{1/(D-1)}$. Un ℓ dell'ordine della lunghezza degli spigoli sarebbe dunque soddisfacente. Poichè dovrebbe esservi un legame tra ℓ e n , cioè tra ℓ e la lunghezza degli spigoli, è presumibile che queste due lunghezze siano proprio dello stesso ordine di grandezza. ℓ va poi identificato con la lunghezza di Planck, rappresentando, entrambe, la lunghezza caratteristica presente nella lagrangiana del campo di gravità.

Discretizzando k_l e facendo variare le sue componenti tra $1/L'$ e $V''^{1/(D-1)}$, discretizzando $\hat{\varphi}^\sigma$ e facendolo variare, in un intorno dell'origine molto più ampio della sua deviazione standard, otteniamo tutte le possibili funzioni $\hat{\varphi}^\sigma(k_l)$. La (53) assegna un'ampiezza di probabilità ad ognuna di queste funzioni. Per ognuna di esse, la formula

$$\begin{aligned} h_{ij} &= \frac{1}{(2\pi)^{D-1}} \int_+ (\varepsilon_{ij\sigma}(k_l) \hat{\varphi}^\sigma(k_l) \exp(ik_l x^l) \\ &+ \varepsilon_{ij\sigma}^*(k_l) \hat{\varphi}^{\sigma*}(k_l) \exp(-ik_l x^l)) d^{D-1}k \end{aligned} \quad (54)$$

determina la funzione $h_{ij}(x^l)$, dalla quale si risale a g_{ij} e, col procedimento descritto nel paragrafo 2 (ammesso di conoscere n), a un grafo associato a

questa metrica. Nota dunque l'ampiezza di ognuno di questi grafi, conosciamo completamente lo stato del sistema, che può essere fatto evolvere, nel modo descritto nel paragrafo 2, per verificare la stabilità del vuoto.

Per ogni grafo, che costituisce lo stato al tempo T , si determina la metrica ad esso corrispondente, e si verifica se, a meno delle fluttuazioni dovute alla discretizzazione, essa corrisponde a quella di un grafo dello stato iniziale. Se così è, abbiamo la nuova ampiezza di tale grafo. Ripetuto ciò per tutti i grafi, e note quindi tutte le loro nuove ampiezze, si può proiettare lo stato finale su quello iniziale, e vedere se vi è una ragionevole probabilità che, nel tempo T , tale stato si conservi. Si può, poi, aumentare T , per vedere l'evoluzione nel tempo di questa probabilità.

Ripetendo questa verifica per tanti valori di n , si può trovare l' n ottimale, che rende più stabile il vuoto, da associare al valore di ℓ che abbiamo scelto.

7 Il gravitone

La (39), con $a^{\sigma\dagger}$ dato dalla (50), applicata allo stato di vuoto che abbiamo appena costruito, ci fornisce lo stato con un gravitone:

$$\Psi_1^\sigma(k_l) = \sqrt{\frac{2\ell^{2-D}\omega}{(2\pi)^{D-1}c}} \hat{\varphi}^{\sigma*}(k_l) \Psi_0. \quad (55)$$

Se k_l appartiene al semispazio interdetto, $\hat{\varphi}^{\sigma*}(k_l)$ va sostituito con $\hat{\varphi}^\sigma(-k_l)$.

Moltiplicando la gaussiana contenuta in Ψ_0 per $\hat{\varphi}^{\sigma*}(k_l)$, il suo picco si sposta dallo 0 a valori del modulo di $\hat{\varphi}^\sigma(k_l)$ maggiori di 0 e ciò avviene solo per la gaussiana associata al vettore d'onda k_l . Dunque, mentre per i k'_l diversi da k_l , $\hat{\varphi}^\sigma(k'_l)$ continuerà a fluttuare attorno a 0, per $k'_l = k_l$ i valori saranno maggiori. L'aspetto del campo di gravità sarà dunque quello di un'onda monocromatica, di vettore d'onda k_l , con delle fluttuazioni attorno ad essa.

Se, anziché un gravitone di quantità di moto ben definita, abbiamo un pacchetto d'onda con funzione d'onda $\phi(x^l)$, calcoleremo le ampiezze delle componenti monocromatiche di ϕ e le moltiplicheremo per i funzionali associati a un gravitone nello stato monocromatico corrispondente:

$$\Psi_1^\sigma = \int \frac{1}{c} \sqrt{\frac{2\omega}{(2\pi)^{D-1}}} \exp(-ik_l x^l) \phi(x^l) \Psi_1^\sigma(k_l) d^{D-1}x d^{D-1}k, \quad (56)$$

avendo scelto, per le componenti monocromatiche di ϕ , la usuale normalizzazione relativistica:

$$\phi(x^l; k_l) = \frac{c}{\sqrt{2(2\pi)^{D-1}\omega}} \exp(ik_l x^l), \quad (57)$$

valida per funzioni d'onda di Klein-Gordon o di d'Alembert, ma non di Schrödinger.

Si intuisce, dalla (56), che la configurazione del campo di gravità sarà costituita da fluttuazioni attorno alla funzione $\phi(x^l)$.

Scelta una opportuna $\phi(x^l)$, nella quale domini un particolare vettore d'onda K_l , la (56) ci permette di associare un'ampiezza ad ogni grafo. Si farà poi evolvere ognuno di essi fino al tempo T , e si proietterà lo stato finale così ottenuto sugli stati monocromatici $\Psi_1^\sigma(k_l)$. La somma dei moduli quadri delle ampiezze ottenute ci darà la probabilità che, al tempo T , lo stato contenga ancora un singolo gravitone, mentre con le ampiezze stesse, opportunamente normalizzate, si potrà costruire la funzione $\phi(x^l)$ di tale gravitone. Variando T e K_l si potrà verificare se, per un tempo sufficientemente grande, questo gravitone si muove di moto rettilineo uniforme con la stessa velocità per tutti i K_l . Se ciò avviene, si potrà dire verificata la relazione di dispersione di d'Alembert, e, con essa, il limite di bassa energia della teoria.

In modo analogo si costruisce lo stato con due gravitoni:

$$\begin{aligned} \Psi_2^{\sigma\gamma}(k_l, k'_l) &= \frac{2\ell^{2-D}}{(2\pi)^{D-1}c} \sqrt{\omega\omega'} \hat{\phi}^{\sigma*}(k_l) \hat{\phi}^{\gamma*}(k'_l) \Psi_0 + \\ &- \delta_{\sigma\gamma} \delta^{(D-1)}(k_l + k'_l) \Psi_0, \end{aligned} \quad (58)$$

e non è difficile trattare il caso in cui essi siano descritti da una funzione d'onda $\phi(x^l, x'^l)$.

In modo analogo si costruiscono gli stati con tre o più gravitoni.

8 Il gravitino

Le soluzioni della teoria si presentano in due stati, che indichiamo

$$\begin{pmatrix} |\Psi(t)\rangle \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ |\Psi(t)\rangle \end{pmatrix}, \quad (59)$$

dove $|\Psi(t)\rangle$ non deve essere normalizzato.

Gli operatori

$$b = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad b^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (60)$$

scambiano tra loro questi due stati e hanno tutte le proprietà di operatori di annichilazione e creazione fermionici.

La teoria ha simmetria globale per la trasformazione generata da

$$Q = b + b^\dagger. \quad (61)$$

Si consideri l'operatore

$$\hat{G}^\sigma(k_l) = \begin{pmatrix} \hat{\varphi}^\sigma(k_l) & \hat{\psi}^\sigma(k_l) \\ -\hat{\psi}^\sigma(k_l) & -\hat{\varphi}^\sigma(k_l) \end{pmatrix}, \quad (62)$$

dove ψ è un nuovo campo.

La trasformazione generata da Q fa ruotare gli operatori di creazione e annichilazione di $\hat{\varphi}^\sigma$ su quelli di $\hat{\psi}^\sigma$ e viceversa. Quando la rotazione è completa,

$$\begin{pmatrix} a^\sigma(k_l) & 0 \\ 0 & -a^\sigma(k_l) \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} a^{\sigma\dagger}(k_l) & 0 \\ 0 & -a^{\sigma\dagger}(k_l) \end{pmatrix} \quad (63)$$

si saranno trasformati in

$$\begin{pmatrix} 0 & -ia^\sigma(k_l) \\ ia^\sigma(k_l) & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} 0 & -ia^{\sigma\dagger}(k_l) \\ ia^{\sigma\dagger}(k_l) & 0 \end{pmatrix}, \quad (64)$$

che sono gli operatori di annichilazione e creazione per ψ .

Oltre che con a^σ e $a^{\sigma\dagger}$, che si presentano in due copie, a seconda di qual è lo stato su cui agiscono, possiamo operare, dunque, anche con $a^\sigma b$, $a^{\sigma\dagger} b^\dagger$, $a^\sigma b^\dagger$ e $a^{\sigma\dagger} b$.

Chiamiamo

$$|\xi_0\rangle = \begin{pmatrix} |\Psi_0\rangle \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad |\eta_0\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ |\Psi_0\rangle \end{pmatrix} \quad (65)$$

i due stati di vuoto della teoria.

Agendo con $a^\sigma b$ su $|\eta_0\rangle$ otteniamo 0. Agendo con $a^{\sigma\dagger} b^\dagger$ otteniamo uno stato identico a quello $a^{\sigma\dagger} |\xi_0\rangle$ di singolo gravitone, relativo all'altro stato di vuoto. Agendo ancora con $a^{\sigma\dagger} b^\dagger$ otteniamo 0, mentre, agendo con $a^\sigma b$ riotteniamo lo stato di vuoto $|\eta_0\rangle$. Dunque $a^\sigma b$ e $a^{\sigma\dagger} b^\dagger$ possono essere pensati come operatori di annichilazione e creazione fermionici, e la particella $a^{\sigma\dagger} b^\dagger |\eta_0\rangle$, che è un gravitone per il vuoto $|\xi_0\rangle$, sarà un fermione per il vuoto $|\eta_0\rangle$. Essendo legato da simmetria (supersimmetria) con il gravitone, tale fermione andrà identificato con un gravitino.

Se, dopo aver creato il gravitino, si tenta di crearne un secondo, di diversi k_l o σ , si ottiene 0. Tuttavia, la condizione per poter definire gli stati di particella in modo non ambiguo è che i campi siano deboli, cioè le particelle molto lontane le une dalle altre. Dunque, $a^\sigma b$ e $a^{\sigma\dagger} b^\dagger$, che coincidono con gli operatori di annichilazione e creazione dei gravitini, finchè non vi è più di un singolo gravitino nell'universo, subiranno, quando il campo diventa più intenso, delle correzioni di ordine superiore, che faranno mutare il loro

comportamento. Tuttavia, una volta compreso che i gravitini di $|\eta_0\rangle$ sono identici ai gravitoni di $|\xi_0\rangle$, è possibile costruire uno stato con un qualunque numero di gravitini.

In modo analogo, con gli operatori $a^\sigma b^\dagger$ e $a^{\sigma\dagger} b$, si costruiscono i gravitini per il vuoto $|\xi_0\rangle$, che saranno identici ai gravitoni per il vuoto $|\eta_0\rangle$.

Si noti che la presenza dei gravitini, in un certo senso, rinormalizza il vuoto: $|\eta_0\rangle$ appare come $|\xi_0\rangle$ e viceversa. Non è però tecnicamente possibile riconoscere in quale dei due vuoti ci si trovi.

Si passa da uno all'altro dei due stati (59) scambiando gli stati 0 e 1 di tutti i vertici, i versi di tutti gli spigoli, e \uparrow con \downarrow . Stabilita una opportuna convenzione, che permetta di riconoscere i due stati di vuoto, cioè ponendoli in due stati diversi, sarà possibile distinguere il gravitino dal gravitone anche quando sono compresenti nello stesso vuoto.

Oltre al gravitone, anche le particelle associate a tutti gli altri campi bosonici esistenti, a cui abbiamo fatto cenno, avranno una controparte fermionica riconoscibile allo stesso modo.

9 Altri stati di vuoto

Gli elementi che abbiamo descritto sono costruiti a partire dallo stato di vuoto più semplice. Pensando lo spazio come composizione di uno spazio interno compatificato ed uno esterno e determinando la metrica dello spazio complessivo, è possibile applicare i metodi del paragrafo 2 a tale spazio complessivo e studiare l'effetto della presenza dello spazio interno. Se, poi, tale spazio è molto piccolo, di estensione confrontabile con la lunghezza degli spigoli, esso perderà di definitezza, e, più che di una compattezza, si parlerà solo di un diverso stato di vuoto. Anche la scelta dei parametri n ed m del paragrafo 2 e il valore nel vuoto di tutti gli altri campi contribuiscono a definire lo stato di vuoto.

Qualora non risulti confermato il comportamento di bassa energia auspicato, è possibile che ciò avvenga in un diverso stato di vuoto.

Riferimenti bibliografici

- [1] Opera originale, in italiano:
Paolo Fabbri, *Un Tentativo per una Teoria del Tutto* (2017),
<http://pfabbri.interfree.it/toe.pdf>
Tentativo di traduzione in inglese:

Paolo Fabbri, *An Attempt for a Theory of Everything* (2018),
http://pfabbri.interfree.it/toe_en.pdf